ствительности интерес представляют только числа, взаимно простые с числом 10.

Очевидно, если $10^r - 1$ кратно каждому из двух взаимно простых натуральных чисел m и n, то $10^r - 1$ кратно и произведению mn. Следовательно, верна следующая теорема:

Если m, n – взаимно простые натуральные числа, то $L(mn) = НОК[L(m), L(n)]$.

Упражнения

20. Найдите длину наименьшего периода дроби

а) $19/42$;

б) $2000/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 1313)$.

21. Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны а) 6 и 12; б) 12 и 20? (Пункты а) и б) составляют содержание задачи М1399.) в) Для любых двух натуральных чисел r и s через $f(r,s)$ обозначим произведение таких степеней p^a простых чисел, для которых ровно одно из чисел r, s кратно p^a и не кратно при этом степени p^{a+1}, а другое из чисел r, s не кратно числу p^a. (Например, $f\left(2^3 \cdot 3 \cdot 11^6, 2^4 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 23\right) = 2^4 \cdot 11^6 \cdot 23$.) Докажите, что числу $f(r,s)$ кратна длина t наименьшего периода суммы любых двух десятичных дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s. г) Докажите, что длина наименьшего периода суммы двух периодических дробей является делителем наименьшего общего кратного длин их периодов. д) Пусть r, s, t – натуральные числа, причем t кратно числу $f(r,s)$ и является делителем числа НОК$[r,s]$. Приведите пример двух десятичных периодических дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s, а длина наименьшего периода их суммы равна t.

Наблюдения Гаусса

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, будучи гимназистом, обращал дроби вида $1/p$, где p – простое число, отличное от 2 и 5, в бесконечные десятичные дроби: в каждом случае он с поразительным терпением ожидал, когда знаки начнут повторяться. Ему хотелось понять, как зависит длина периода такой дроби от p.

Выписывание полного периода, скажем, для $p = 47$ – утомительное занятие (46 знаков!). Однако Гаусс не терял надежды и продолжал вычисления: он выписал периоды для всех простых чисел $p < 1000$. Главная закономерность, которую он обнаружил, состоит в том, что длина $L(p)$ наименьшего периода такой дроби является делителем числа $p - 1$, иногда совпадая с ним (см. таблицу 2). А именно, $L(p) = p - 1$ для $p = 7, 17, 23, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193$ и некоторых других чисел [8].

Таблица 2

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
$L(p)$	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Мы докажем эту закономерность чуть ниже, а пока рассмотрим следующие разложения:

$$1/7 = 0,(142857),$$
$$2/7 = 0,(285714),$$
$$3/7 = 0,(428571),$$
$$4/7 = 0,(571428),$$
$$5/7 = 0,(714285),$$
$$6/7 = 0,(857142).$$

Периоды этих шести дробей начинаются сразу после запятой и получаются друг из друга циклическим сдвигом. Это могло бы показаться случайным курьезом, будь мы любителями «занимательной» математики. Но не будем столь наивны и внимательно рассмотрим этот эффект.

Возьмем вместо 7, например, 41. Очевидно,

$$1/41 = 0,(02439).$$

«Прокрутим» период:

$$0,(24390) = 10/41,$$

$$0,(43902) = 10 \cdot 0,(24390) - 2 = \frac{100}{41} - 2 = 18/41,$$

$$0,(39024) = 10 \cdot 0,(43902) - 4 = \frac{180}{41} - 4 = 16/41,$$

$$0,(90243) = 10 \cdot 0,(39024) - 3 = \frac{160}{41} - 3 = 37/41.$$

Получили цикл из пяти чисел: 1, 10, 18, 16, 37. Каждое число этого цикла – остаток от деления удесятеренного предыдущего на 41.

Если бы мы начали с $2/41 = 0,(04878)$, то получили бы другой цикл: $0,(48780) = 20/41$, $0,(87804) = 36/41$, $0,(78048) = 32/41$, $0,(80487) = 33/41$.

Всего для $p = 41$ получаем 8 циклов, по 5 дробей в каждом. В общем случае, если натуральное число n взаимно просто с 10 и отлично от 1, то все правильные несократимые дроби со знаменателем n разбиваются на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле. Значит, количество таких дробей кратно числу $L(n)$. (В частности, если p – простое число, то все дроби вида m/p, где $1 \le m < p$, – несократимые, откуда и следует обнаруженная юным Гауссом закономерность!)

Упражнения

22. а) Решите ребус: ПЛОМБА · 5 = АПЛОМБ. (Здесь в записях шестизначных чисел ПЛОМБА и АПЛОМБ разные буквы обозначают разные цифры.) б) Найдите шестизначное число, уменьшающееся в 5 раз при переносе первой цифры в конец числа. в) Решите ребус: НИКЕЛЬ · 6 = ЕЛЬНИК. (*Указание*. В словах ребуса использованы два слога: НИК и ЕЛЬ. Обозначьте НИК = x и ЕЛЬ = y.) г) Существует ли шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает числа, записанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке? д) Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при переносе последней цифры из конца в начало.

23. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что если его цифры циклически переставить, то полученное число тоже будет делиться на 41.

24. Число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

25 * (М1252). Пусть a и n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

Теорема Эйлера

Количество правильных несократимых дробей со знаменателем n обозначают через $\varphi(n)$ (см. таблицу 3) [9]. Для любого простого числа p, очевидно, $\varphi(p) = p - 1$.

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\varphi(n)$	1	1	2	3	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16

Поскольку $\varphi(n)$ правильных несократимых дробей можно разбить на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле, то верна следующая теорема:

Теорема 3. *Если n – натуральное число, то $\varphi(p)$ кратно числу $L(n)$.*

Следствие. *Если n – натуральное число, взаимно простое с числом 10, то $10^{\varphi(n)} - 1$ кратно n.*

---

[8] *Конечно или бесконечно множество чисел, для которых $L(p) = p - 1$, по сей день неизвестно.*

[9] *Подробнее об этой функции можно прочитать в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» (см. «Квант» №1 за 2000 г.).*