Периодические дроби

Л.СЕМЁНОВА

Как вы знаете, обыкновенная дробь – это число, составленное из целого количества долей единицы. Дробь записывают в виде $\frac{m}{n}$ или m/n, где числитель m – целое число, а знаменатель n – натуральное число. Для получения дроби m/n надо разделить единицу на n равных частей и взять m таких частей. Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же натуральное число. Благодаря этому любые две дроби k/l и m/n можно привести к общему знаменателю ln, заменив их на $kn/(ln)$ и $ml/(ln)$.

Если числитель и знаменатель дроби имеют отличный от единицы общий делитель, то дробь можно сократить – разделить на него числитель и знаменатель. Вследствие этого всякую дробь можно представить в несократимом виде, т. е. в виде дроби, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа[1]. Например, $120/344$ – сократимая дробь ($\frac{120}{344}=\frac{15\cdot 8}{43\cdot 8}=\frac{15}{43}$), а $15/43$ – равная ей несократимая дробь.

Дробь m/n называют *правильной*, если $0\le m<n$. Всякую дробь можно единственным образом представить в виде суммы целого числа $[m/n]$ (целой части дроби m/n) и правильной дроби $\{m/n\}$ (дробной части). Например,

$$\frac{91}{17}=\frac{5\cdot 17+6}{17}=5+\frac{6}{17}.$$

Сумму и разность дробей с одинаковыми знаменателями определяют по правилам:

$$\frac{a}{n}\pm\frac{b}{n}=\frac{a\pm b}{n}.$$

Чтобы сложить или вычесть дроби k/l и m/n с разными знаменателями, их предварительно приводят к общему знаменателю. Обычно в качестве него берут наименьшее общее кратное НОК$[l,n]$ чисел l и n.

Нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548–1620) предложил использовать десятичные дроби, т.е. дроби, знаменатели которых – степени числа 10. Складывать, вычитать и сравнивать[2] их легче, чем обыкновенные дроби. Десятичные дроби обычно пишут без знаменателя, например, $\frac{5481475}{10000}=548{,}1475$ и $\frac{23}{1000}=0{,}023$.

Известно вам и то, что рациональное число (обыкновенная дробь) – это периодическая десятичная дробь, а иррациональное – непериодическая. Но далеко не каждый может объяснить, почему это так. А уж на вопросы: «Какова длина периода десятичного представления дроби $1/7^7$? Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны 6 и 12?» – ответят очень и очень немногие.

Эта статья – обстоятельный рассказ о связи между обыкновенными и периодическими десятичными дробями. Мы научимся решать некоторые весьма непростые задачи и докажем одну из важнейших теорем арифметики – теорему Эйлера (и ее частный случай – малую теорему Ферма). Но не будем торопиться, а разберем все по порядку.

От обыкновенной дроби – к десятичной

Как записать обыкновенную дробь m/n в десятичной системе счисления? Если n – степень двойки, степень пятерки или произведение степеней двойки и пятерки, то получится – конечная десятичная дробь. Например,

$$\frac{13}{64}=\frac{13\cdot 15625}{64\cdot 15625}=\frac{203125}{1000000}=0{,}203125;$$

$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=0{,}12;$$

$$\frac{3}{40}=\frac{3\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{75}{1000}=0{,}075.$$

Хотя число 35 не является произведением степеней двойки и пятерки, сократимая дробь $7/35$ представима в виде конечной десятичной дроби:

$$7/35=1/5=0{,}2.$$

Но если дробь m/n несократима и при этом хотя бы один из простых делителей числа n отличен от 2 и 5, то m/n нельзя представить в виде конечной десятичной дроби[3].

Переводить дроби из обыкновенных в десятичные можно делением «уголком». Например, разделим 3 на 7:

$$\begin{array}{l|l} \underline{3} & 7 \\ \underline{0} & 0{,}4285714 \\ 30 & \\ \underline{28} & \\ 20 & \\ \underline{14} & \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{35} & \\ 50 & \\ \underline{49} & \\ 10 & \\ \underline{7} & \\ 30 & \\ \underline{28} & \\ \ldots & \end{array}$$

Целая часть равна 0. Чтобы получить первую цифру после запятой, разделим 30 на 7. Получим частное 4 и остаток 2. Разделив 20 на 7, получаем частное 2 и остаток 6. Следующий шаг – деление 60 на 7 – дает частное 8 и остаток 4. Далее,

$$40=5\cdot 7+5,$$

$$50=7\cdot 7+1,$$

$$10=1\cdot 7+3.$$

Мы вернулись к задаче деления 3 на 7; произошло зацикливание: если продолжим деление, то опять получим

[1] *Числа m и n называют взаимно простыми, если единственным их общим делителем является число 1, т.е. если число m не делится ни на один из простых делителей числа n.*

[2] *Это очень важно для практики: десятичные дроби гораздо легче сравнивать между собой, чем обыкновенные!*

[3] *Действительно, если $m/n=a/10^b$, то $10^b m=an$; рассмотрев любой отличный от 2 и 5 простой делитель p числа n, приходим к противоречию: an кратно p, а равное ему число $10^b m$ – не кратно.*