калью, выделим $2m$ «доминошек», а остальную часть исходного квадрата разобьем на m^2 четырехклеточных квадратиков. В каждом внутреннем ходе участвовать могли фишки, принадлежащие не более чем двум из $m^2 + 2m$ рассматриваемых фигур, а в каждом внешнем – не более чем одной. Имеем неравенство

$$2k + l \geq 2m^2 + 2m, \qquad (3)$$

поскольку фишки каждого из квадратиков участвовали не менее чем в двух ходах, а фишки каждой «доминошки» – по крайней мере в одном.

Из (1) и (3) следует, что

$$3(k + l) \geq 4m^2 + 4m = n^2 - 1.$$

Если здесь $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, то, очевидно

$$3(k + l) \geq n^2, \text{ и } k + l \geq \frac{n^2}{3} = \left[\frac{n^2}{3}\right],$$

в противном случае $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $k + l \geq \dfrac{n^2 - 1}{3} = \left[\dfrac{n^2}{3}\right]$.

Тем самым, утверждение задачи полностью доказано.

Можно показать дополнительно, что для всякого $e < 1/2$ минимальное количество ходов, начиная с некоторого номера n, превышает en^2. Такая оценка получена Игорем Певзнером (Кировский физико-математический лицей), финалистом XXV Всероссийской математической олимпиады.

С.Токарев

М1705. *Через точку внутри сферы проведены три попарно перпендикулярные плоскости, которые рассекли сферу на 8 криволинейных треугольников. Эти треугольники закрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета (рис.1). Докажите, что площадь черной части сферы равна площади ее белой части.*

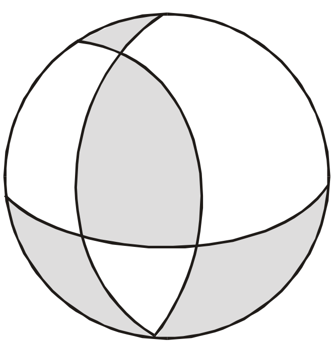


Рис.1

Докажем равносоставленность черной и белой частей сферы, тем самым будет доказана их равновеликость. Обозначим через α, β и γ плоскости, рассекающие сферу, а через $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ – плоскости, соответственно симметричные им относительно центра сферы. Эти шесть плоскостей рассекают сферу на попарно равные куски так, что один из них белый, а другой черный в каждой паре. Однако этот факт легко услышать, но труднее увидеть.

Чтобы увидеть было легче, будем следовать принципу постепенности. Между плоскостями α и $\overline{\alpha}$, которые будем считать горизонтальными, расположен сферический пояс, выше и ниже которого располагаются две сферические «шапки». Заметим, что плоскости β, $\overline{\beta}$, γ и $\overline{\gamma}$ разрезают эти шапки на части так, что каждая белая часть одной шапки симметрична черной части другой шапки относительно горизонтальной плоскости π, проходящей через центр сферы.

Осталось разобраться со сферическим поясом. Для этого воспроизведем на рисунке сечение сферы плоскостью π, на котором показаны следы секущих плоскостей и следы черных и белых кусков сферического пояса (рис.2). Одинаковым номерам соответствуют следы тех кусков, которые симметричны и имеют разные цвета.

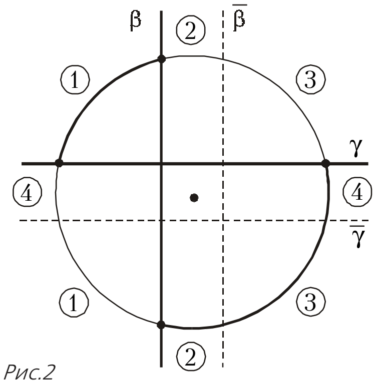


Рис.2

Напоследок заметим, что объектом утверждения задачи может выступать не только сфера, но любая поверхность выпуклого тела, имеющего три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (например, эллипсоид или правильный октаэдр; случай с октаэдром особенно интересен, поскольку у него существуют различные попарно перпендикулярные тройки плоскостей симметрии). Но в указанном смысле также любопытен и случай с обыкновенным кубом (рис.3).

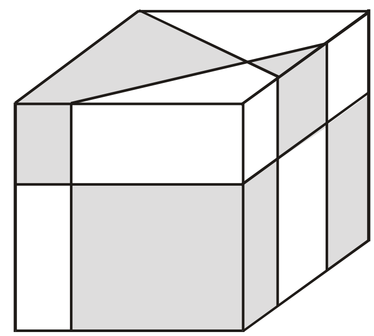
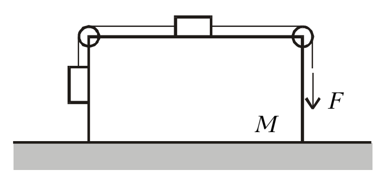


Рис.3

В.Произволов

Ф1713. *Система состоит из большого тела массой M, к которому прикреплены два блока, и двух одинаковых гладких тел массой $M/5$ каждое (см. рисунок). Каким должен быть коэффициент трения между большим телом и поверхностью стола, чтобы это тело могло оставаться неподвижным при любых значениях направленной вертикально вниз силы $\vec{F}$? Нити считать легкими и нерастяжимыми, трение учитывать только между поверхностью стола и большим телом. Считайте, что за время решения этой задачи тела не успеют удариться о блоки.*



Силы натяжения нити у правого блока равны F. Обозначим силы натяжения у левого блока через T. Тогда ясно, что сдвинуть большое тело в горизонтальном направлении «пытается» разность сил $F - T$, а прижимает его к столу сумма сил $N = Mg + 0{,}2Mg + F + T$. Если выполняется условие $F - T \leq \mu N$, то большое тело может оставаться неподвижным. Осталось выразить силу T и записать условие для коэффициента трения μ.

Считая большое тело неподвижным, запишем уравнения движения для подвижных тел:

$$F - T = 0{,}2Ma, \quad T - 0{,}2Mg = 0{,}2Ma,$$

откуда найдем силу T:

$$T = 0{,}5F + 0{,}1Mg.$$