М1702*. *В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.*

Возьмем граф на 12 вершинах, которые соответствуют людям; две его вершины соединены, если люди незнакомы.

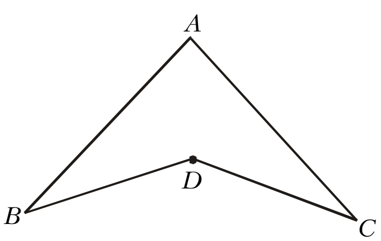
Если в этом графе нет циклов нечетной длины, то его можно разбить на две части, в каждой из которых вершины не будут соединены, и поэтому найдутся 6 попарно знакомых.

Предположим теперь, что в графе есть циклы нечетной длины. Рассмотрим нечетный цикл минимальной длины. Пусть его длина равна:

а) 2. Тогда если среди 9 человек, не входящих в этот цикл, есть два незнакомых, то среди оставшихся 7 человек из каждых 4 найдутся три знакомых. Таким образом, в подграфе на 7 вершинах каждые два ребра имеют общую вершину. Третье ребро обязано проходить через эту вершину. Иначе среди 4 человек не найдется трех знакомых. Поэтому все ребра имеют общую вершину, и, удаляя эту вершину, мы получаем 6 попарно знакомых.

б) 5. Тогда, как и выше, среди оставшихся 7 из каждых 4 найдутся 3 знакомых и среди этих 7 найдутся 6 знакомых.

в) 7. Тогда среди 5 человек, не входящих в этот цикл, все попарно знакомы. Если есть человек из цикла, знакомый со всеми этими 5, то все доказано. В противном случае, каждый из цикла не знаком с кем-то из оставшихся. Так как $7 > 5$, то найдется человек A из оставшихся, не знакомый с двумя из цикла – B и C (см. рисунок). Из того, что мы взяли цикл минимальной длины, следует, что эти два незнакомых из цикла должны быть знакомы через одного D. Но тогда D знаком со всеми из пяти оставшихся, потому что, удаляя из цикла D и заменяя на A, мы получаем снова цикл длины 7, а в дополнении к циклу длины 7 все попарно знакомы.



г) 9. Цикла длины 9 не может быть по условию задачи.

д) 11. Тогда, как и выше при рассмотрении циклов длины 7, мы видим, что оставшийся человек может быть незнаком максимум с двумя из цикла. Но тогда в цикле легко найти 5 человек, знакомых между собой и с оставшимся. (Например, взяв идущих через одного по циклу и не знакомых с оставшимся.)

В.Дольников

М1703. *Для чисел a, b и c нашлись два неравных натуральных числа m и n такие, что $a^m + b^m + c^m = 0$ и $a^n + b^n + c^n = 0$. Докажите, что $abc = 0$.*

Пусть числа m и n нечетны и $abc \neq 0$. Тогда условия можно переписать в виде

$$x^n + y^n = z^n, \quad x^m + y^m = z^m,$$

где $x,\ y,\ z > 0$.

Если $x = y$, то $2^m = 2^n$.

Пусть $x > y$, $n > m$. Положим $\frac{y}{x} = t < 1$. Тогда

$$\left(1+t^n\right)^m = \left(1+t^m\right)^n.$$

Но $0 < t < 1$, поэтому $t^m > t^n$,

$$1+t^m > 1+t^n,$$

$$\left(1+t^m\right)^n > \left(1+t^n\right)^m .$$

Полученное противоречие доказывает равенство $abc = 0$.

Замечание. Используя свойства функции $y = x^\alpha$, где $\alpha > 1$, нетрудно доказать более сильное, чем утверждение задачи,

Предложение. Пусть

$$a^m + b^m + c^m + d^m = 0,$$

$$a^n + b^n + c^n + d^n = 0,$$

где $m \neq n$. Тогда числа $a,\ b,\ c,\ d$ можно разбить на пары вида $(k,-k)$, $(l,-l)$.

В.Произволов, В.Сендеров

М1704*. *В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов.*

Будем различать два типа ходов – внутренние и внешние, в зависимости от того, куда ставится фишка, делающая ход: внутрь исходного квадрата $n \times n$ клеток или вне его. Пусть получена позиция, где дальнейшие ходы невозможны, причем сделано k внутренних ходов и l внешних. Ясно, что никакие две фишки не находятся в соседних клетках, а в исходном квадрате $n \times n$ не менее чем $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ клеток пусты. Так как каждый внутренний ход увеличивал количество пустых клеток не более чем на 1, а каждый внешний – не более чем на 2, то имеем неравенство

$$k + 2l \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]. \qquad (1)$$

Предположив теперь, что n четно, разобьем исходный квадрат на $\frac{n^2}{4}$ четырехклеточных квадратиков и заметим, что на каждый квадратик пришлось не менее двух ходов, в которых участвовали (делали ход или снимались с доски) фишки, стоявшие в клетках этого квадратика. Поскольку в каждом внутреннем ходе участвовали фишки не более чем двух квадратиков, а в каждом внешнем – не более чем одного, то

$$2k + l \geq 2\frac{n^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем $k + l \geq \frac{n^2}{3} \geq \left[\frac{n^2}{3}\right]$, т.е. утверждение задачи в этом случае верно.

Легко видеть, что оно верно также при $n = 1$ и при $n = 3$.

В случае $n = 2m + 1$, где $m > 1$, в «кресте», образованном третьей сверху горизонталью и третьей слева верти-