Утверждение задачи доказано.
Замечание. Если A_1, B_1, C_1 – некоторые точки прямых (но не обязательно отрезков!) BC, CA, AB соответственно, то утверждение задачи теряет силу. Покажем это: для произвольного числа $\varepsilon > 0$ построим треугольник, все высоты которого меньше ε, а площадь – больше 1.

Пусть окружность O, диаметр которой меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, касается прямой l; точки B и C лежат на l так, что равнобедренный ($AB = AC$) треугольник ABC описан около окружности O. Выберем точку A так, чтобы было $h_a < \frac{\varepsilon}{2}$. При этом, очевидно, площадь треугольника ABC может быть сделана больше 1; покажем, что $h_b = h_c < \varepsilon$.
Пусть $AD = h_a$, DE – перпендикуляр из точки D на прямую AB. Очевидно, $h_c = 2DE$; но $DE < AD < \frac{\varepsilon}{2}$. Получим $h_c < \varepsilon$.

В.Сендеров

М1699. *Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство*

$$\left\{\sqrt{1}\right\}+\left\{\sqrt{2}\right\}+\ldots+\left\{\sqrt{n^2}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

(Здесь $\{k\}$ – дробная часть числа k.)

При $n = 1$ неравенство обращается в равенство $0 = 0$. При $n > 1$ докажем, что сумма дробных частей на каждом промежутке между двумя последовательными квадратами удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=m^2}^{m^2+2m}\left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{2m+1}{2}. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить (например, с помощью очевидного неравенства $\sqrt{m^2+x} \le m+\frac{x}{2m}$), что

$$\sqrt{m^2+a}+\sqrt{m^2+2m-a} \le 2m+1$$

при $0 \le a \le m$.
Следовательно,

$$\left\{\sqrt{m^2+a}\right\}+\left\{\sqrt{m^2+2m-a}\right\} \le 1. \qquad (2)$$

Просуммировав эти неравенства при $a = 0, 1, \ldots, m-1$ и неравенство $\left\{m^2+m\right\} \le \frac{1}{2}$ (получаемое делением на 2 обеих частей (2) при $a = m$), приходим к неравенству (1). Суммируя неравенство (1) по всем m от 1 до $n-1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

Остается заметить, что $\left\{\sqrt{n^2}\right\} = 0$.

А.Храбров

М1700*. *На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, …, 2n. Блоха начинает прыгать из точки 1 и через 2n прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна n(2n – 1). Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна n.*

Натуральные числа от 1 до $2n$ расставим в той последовательности, в какой в них попадает блоха:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2n}. \qquad (1)$$

Общая длина всех прыжков представляется циклической суммой, оценка сверху для которой такая:

$$\left|x_1-x_2\right|+\left|x_2-x_3\right|+\ldots+\left|x_{2n-1}-x_{2n}\right|+\left|x_{2n}-x_1\right| \le$$

$$\le 2(2n+2n-1+\ldots+n+1)-$$

$$-2(n+n-1+\ldots+2+1) = 2n^2.$$

В силу этого и условия задачи длина последнего прыжка блохи не превосходит n, т.е. $\left|x_{2n}-x_1\right| \le n$, или $x_{2n} \le n+1$. Нам нужно доказать, что $x_{2n} = n+1$.
Допустим противное, т.е. $x_{2n} \le n$. Но тогда в последовательности (1) найдутся два соседних члена x_i и x_{i+1}, каждый из которых больше n. Перестроим последовательность (1):

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots, x_{i+1}. \qquad (2)$$

Циклическая сумма S для (2) удовлетворяет оценке сверху:

$$\left|x_1-x_2\right|+\ldots+\left|x_i-x_{2n}\right|+\left|x_{2n}-x_{2n-1}\right|+\ldots+\left|x_{i+1}-x_1\right| \le 2n^2.$$

В то же время

$$S = n(2n-1)-\left|x_i-x_{i+1}\right|+\left|x_i-x_{2n}\right|+\left|x_{i+1}-1\right|.$$

Оценив последнее выражение для S, легко заключить, что $S > 2n^2$, – противоречие. Значит, $x_{2n} = n+1$.

В.Произволов

М1701. *Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2+y^3 \ge x^3+y^4$. Докажите, что $x^3+y^3 \le 2$.*

Вначале докажем, что

$$x+y^2 \ge x^2+y^3. \qquad (*)$$

Допустим противное: $x+y^2 < x^2+y^3$, тогда, складывая это неравенство с неравенством $x^3+y^4 \le x^2+y^3$, получим $\left(x+x^3\right)+\left(y^2+y^4\right) < 2x^2+2y^3$, что противоречит неравенствам

$$x+x^3 \ge 2x^2 \text{ и } y^2+y^4 \ge 2y^3.$$

Из (*) получаем

$$x+y^2 \ge x^2+y^3 \ge x^3+y^4,$$

откуда

$$2x+2y^2 \ge x^2+y^3+x^3+y^4.$$

Замечая, что

$$\left(1+x^2\right)+\left(1+y^4\right) \ge 2x+2y^2 \ge x^2+y^3+x^3+y^4,$$

получаем неравенство

$$2+x^2+y^4 \ge x^2+y^3+x^3+y^4,$$

равносильное требуемому.

С.Злобин