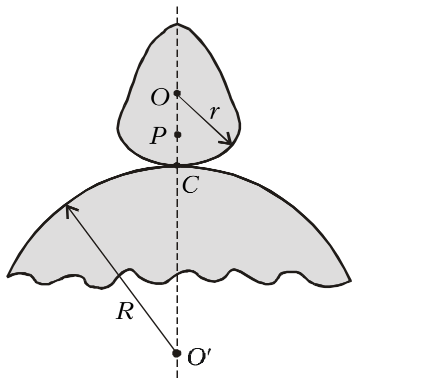

Рис.1

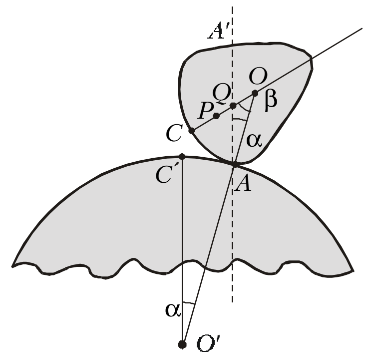

Рис.2

например на футбольном мяче, кирпич труднее уравновесить, чем на плоскости или вогнутой поверхности. Таким образом, устойчивость равновесия тела на опоре зависит от формы тела (точнее – его основания) и от поверхности опоры.

Чтобы вывести критерий устойчивости, обратимся снова к качающейся скале или к камню и рассмотрим случай, когда камень и опора в области соприкосновения имеют сферическую форму. (В Приложении к статье вводится понятие кривизны поверхности и рассматривается решение этой задачи для тел произвольной формы.) Будем предполагать, что камень и опора, на которой он стоит, сточились или обветрились и стали гладкими, без сколов и выступов, так что область контакта камня с опорой мала и может быть принята за точку. На рисунке 1 показано сечение камня и опоры вертикальной плоскостью, проходящей через точку их соприкосновения (точка C); здесь O и O' – центры сферических поверхностей камня и опоры в области контакта, r и R – их соответствующие радиусы. Для равновесия камня необходимо прежде всего, чтобы его центр тяжести (точка P) лежал на вертикали OO'; при этом условия (а) и (б) выполняются. Посмотрим, к чему приведет небольшое отклонение камня от первоначального положения.

Пусть в результате отклонения положение камня на опоре стало таким, как на рисунке 2; здесь Q – точка пересечения прямой PO с вертикалью, проходящей через точку A – новую точку контакта камня с опорой. Если точка P окажется правее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки опоры A будет способствовать дальнейшему отклонению, и камень уже не вернется в первоначальное положение. Если же точка P окажется левее вертикали AA', момент силы тяжести будет возвращать камень в первоначальное положение. А это значит, что равновесие камня будет устойчивым.

Итак, если $CP < CQ$, то равновесие устойчивое. Посмотрим, как при этом связаны между собой величины CP, R и r. В треугольнике OAQ (см. рис.2)

$$\beta = \frac{CA}{r} = \frac{C'A}{r} = \alpha\frac{R}{r}$$

(так как углы малы). По теореме синусов имеем

$$\frac{OQ}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} = \frac{r}{\sin\left(\alpha + \alpha\frac{R}{r}\right)}. \quad (1)$$

Нас интересуют малые отклонения камня от положения равновесия. Говоря «малое отклонение», мы имеем в виду, что расстояние, «проходимое» точкой контакта на поверхности опоры, т.е. дуга $C'A$ (и, следовательно, дуга CA, равная $C'A$), мало по сравнению с радиусами r и R поверхностей камня и опоры. А это и означает, что углы α и β малы, т.е.

$$\alpha \ll 1 \text{ и } \beta = \alpha\frac{R}{r} \ll 1.$$

Для малых углов, как известно, синус угла с хорошей точностью равен самому углу. Поэтому выражение (1) можно записать так:

$$\frac{OQ}{r} = \frac{1}{1 + R/r}, \text{ или } OQ = \frac{r^2}{R+r}.$$

Так как

$$CQ = r - OQ = \frac{Rr}{R+r},$$

условие устойчивого равновесия камня, т.е. условие $CP < CQ$, записывается в виде неравенства

$$CP < \frac{Rr}{R+r}. \quad (2)$$

Если поверхность опоры имеет вогнутую форму с радиусом R (форму внутренней поверхности сферы радиусом R), то условие устойчивого равновесия камня на опоре выглядит так:

$$CP < \frac{Rr}{R-r}. \quad (3)$$

(Попробуйте вывести эту формулу самостоятельно.)

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Допустим, что равновесие камня на опоре устойчивое. Тогда при отклонении камня от положения равновесия возникает момент силы, препятствующий этому отклонению: у силы тяжести относительно новой точки опоры появляется плечо (см. рис.2). Чтобы удержать камень в новом положении неподвижным, требуется приложить внешнюю силу, такую, чтобы ее момент относительно новой точки опоры был равен по величине и противоположен по направлению моменту силы тяжести; величина и направление этой силы определяются условием (а). Следовательно, даже для небольшого отклонения тела от положения устойчивого равновесия необходимо совершить работу против силы тяжести. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии тела. А это означает, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела имеет минимальное значение, или, что то же самое, центр тяжести тела занимает наинизшее положение. Поэтому условие (2) можно вывести иначе, посмотрев, что происходит с центром тяжести камня при его небольшом отклонении (см. упражнение 1). Такие два различных подхода к решению проблемы устойчивости эквивалентны. Если камень слегка отклонить от положения устойчивого равновесия и не удерживать его в новом положении, он вернется назад, «проскочит» (по инерции) положение равновесия, снова вернется к нему и т.д., т.е. камень будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия.

Если небольшое отклонение тела от положения равновесия приводит