Архимед и его формула для объема шара

Я вдруг обнаружил маленькую колонну, вершина которой поднималась из зарослей. На ней были изображены шар и цилиндр, которые я искал. Я тотчас же сказал сопровождавшим меня, что перед нами, несомненно, могильный памятник Архимеда.

Цицерон

Архимед (ок. 287—212 до н.э.) — величайший ученый Древнего мира. Имя его овеяно легендами. Мы восклицаем: «Эврика!» — выражая, как Архимед, восторг по поводу своей удачи. Каждый знает, что он может перевернуть мир, если найдется надежная точка опоры. У каждого перед глазами сцена: убийца с обнаженным мечом и сидящий старец, восклицающий: «Не трогай моих чертежей!»

Архимед общепризнанно считается одним из величайших гениев в истории человечества. Его вклад в математику огромен. Именно он придумал формулу для определения площади треугольника по его сторонам (она известна нам как формула Герона). Не кто иной, как Архимед первый дерзнул исчислить размеры окружающего нас мира. Он определил границы для числа π, доказав, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Вплотную он подошел к понятию определенного интеграла, опередив человечество почти на два тысячелетия. Ему принадлежат точные формулировки законов природы, сохранившиеся в неприкосновенности на все времена. Но более всего он гордился найденной им формулой объема шара, и в память об этом потомки изобразили шар и цилиндр на его могильном камне.

Докажем, следуя идеям Архимеда, тот результат, который доставил ему высшую творческую радость.

Теорема 1. *Объем шара радиуса 1 равен* $\frac{4}{3}\pi$.

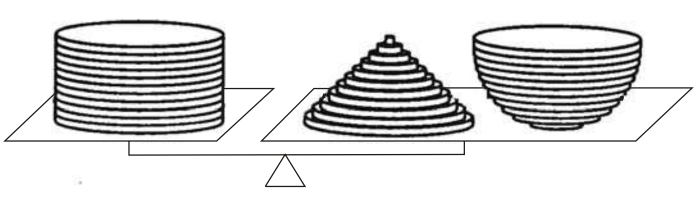
Доказательство. Мы будем опираться на следующие две формулы стереометрии: объем цилиндра с радиусом основания R и высотой H равен $\pi R^2 H$, и объем конуса с радиусом основания R и высотой H равен $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. Эта последняя формула также принадлежит Архимеду.

А теперь перейдем к доказательству. Я надеюсь, вы еще не забыли детских игрушек, которые называются *пирамидками.* Вот как они устроены: имеются подставка с вертикальной палочкой и набор колечек разного размера. Надо нанизать эти колечки на палочку так, чтобы размеры колечек увеличивались по мере приближения к подставке. Тогда получится фигура, похожая на конус.

Доказательство теоремы Архимеда (по Архимеду) очень легко понять с помощью подобных игрушек. Только надо сделать не одну — коническую, а три разных — цилиндрическую (когда колечки будут иметь радиус 1, сами будут тоненькими-претоненькими, а если собрать их все вместе, то они образуют цилиндр высоты 1), коническую (из таких же тоненьких колечек, но разных радиусов, из которых можно собрать «почти» конус высоты и радиуса основания, равных 1) и «полушаровую» (опять-таки из таких же тоненьких колечек, из которых можно собрать «почти» полушар радиуса 1). При этом все колечки должны быть сделаны из одинакового материала.

Вслед за Архимедом, возьмем аптекарские весы с плоскими чашами и поставим на одну чашу собранную из колечек игрушку-цилиндр, а на другую — конус и полушар, причем конус поставим основанием на чашу весов, а полушар — «на голову», чтобы плоское основание полушара было сверху и расположено горизонтально.

Пусть высоты колечек одинаковы и равны δ, где δ — очень малое число. Подсчитаем, каков объем колечек, находящихся на одной и той же высоте h. У цилиндрического колечка этот объем равен $\pi\delta$, у конического $\pi(1-h)^2\delta$, а у «полушарного» $\pi\left(1-(1-h)^2\right)\delta$ (ибо радиус колечка у конуса равен $1-h$, а у полушара, по теореме Пифагора, $\sqrt{1-(1-h)^2}$). Суммарный объем на каждой из чаш весов оказался одинаковым. Но если δ очень мало, то коническая игрушка будет почти неотличима от конуса, полушаровая — от полушара, а цилиндрическая — всегда цилиндр.



В пределе получаем, что объем полушара радиуса 1 равен объему цилиндра с радиусом основания и высотой, равными 1, минус объем конуса с радиусом основания и высотой, также равными 1. Откуда и следует теорема 1.

Теорема Ферма—Эйлера о представлении простых чисел в виде суммы двух квадратов

Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние знали не все.

Пьер Ферма

Пьер Ферма (1601—1665) — человек удивительной судьбы: один из величайших математиков всех времен, он не был, в современной терминологии, «профессиональным» математиком. По профессии Ферма был юристом. Он получил великолепное гуманитарное образование и был выдающимся знатоком искусства и литературы. Всю жизнь он проработал на государственной службе, последние 17 лет был советником местного парламента в Тулузе.

К математике его влекла бескорыстная и возвышенная любовь. В те годы не было еще математических журналов, и Ферма почти ничего не напечатал при жизни. Но он много переписывался со своими современниками, и посредством этой переписки некоторые его достижения становились известными. Пьеру Ферма повезло с детьми: сын обработал архив отца и издал его.

«Я доказал много исключительно красивых теорем», — сказал как-то Ферма. Особенно много красивых фактов удалось ему обнаружить в теории чисел, которую, собственно, он и основал.

Он внес огромный вклад в зарождающиеся новые направления, определившие последующее развитие науки: математический анализ и аналитическую геометрию. Мы признательны Ферма за то, что он приотк-