Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)

1. Решите уравнение

$$\left(x^2+4\right)\lg\sin^2 3x + x^2\lg\cos^2 2x = \\ = 4\lg\left(\cos 2x\sin^3 3x\right).$$

2. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый – со знаком «плюс», второй – со знаком «минус» и т.д.) равна $\frac{20}{27}$. Найдите знаменатель прогрессии.

3. Найдите все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|\left(|x-5|-|x-3|\right)-6x$$

и

$$|x|\left(|x|-|x-8|\right)+24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найдите AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \ge \frac{5a+5}{2\left(2^x+3a+3\right)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

6. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9} \le 3^{x^2-2}+27^{2x+3}.$$

2. Решите уравнение

$$\left|\log_2(2x+7)\right| = \\ = \log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right).$$

3. При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right)=\sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

4. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+\left(2a^2+6\right)x-a^2+2a-3}{x^2+\left(a^2+7a-7\right)x-a^2+2a-3}<0,$$

не меньше 1.

6. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-99», апрель)

1. Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 ч, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между B и C.

2. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right| \ge \\ \ge 9\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right|.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x\cos x.$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ADB, равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найдите AD.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 – общие перпендикуляры к парам отрезков A_1C_1 и AB_1, BC_1 и AC, DC_1 и AD_1 соответственно. Объем параллелепипеда равен V, радиус описанной сферы равен R, а сумма длин ребер AA_1, AB и AD равна m. Найдите сумму объемов пирамид $AA_1M_1N_1$, ABM_2N_2 и ADM_3N_3.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравните $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right)$ и $\dfrac{19\pi}{24}$.

2. На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - \left(2 - \sqrt{3}\right)x$, пересекает ее в точках A и B. Найдите сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

3. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4} + 2\right| \geq -3 + \log_{\frac{1}{\pi+1}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды S, равны $\sqrt{2}$. Известно, что $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \dfrac{2\pi}{3}$. Найдите высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника $ABCD$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}14x + 3\operatorname{ctg}14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

6. В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle ACB = 75°$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)

1. Решите уравнение

$$\sin x - \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1} = x + 4.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{1}{\log_9(x+5)}.$$

4. В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB, а точка M – на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O, $AN : NB = 2 : 3$, $BO : OM = 5 : 2$. Найдите $CO : ON$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

6. В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = p$, $MN = q$. Найдите PQ.

7. При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leq x < 2\pi$?

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B_1 и D параллельно прямой AC. Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной B.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\left|2 - \frac{1}{x-4}\right| < 3.$$

3. В равнобочную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, $BC : AD = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите AB.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2\cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5\cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}.$$

6. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой прямой взята точка B так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найдите ON.

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро SA равно b. Сфера радиуса $\dfrac{b}{2}$ касается плоскости SAC в точке C и проходит через точку B. Найдите $\angle ASC$.

8. Для любого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right) > 1$$

и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \leq 2.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right)\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\log_{3-x}(2x+1)\right)\left(\log_{2x+1}x^2\right) \leq \left(\log_{3-x}(3x+1)\right)\left(\log_{3x+1}(x+2)\right).$$

4. В треугольнике ABC угол $\angle B$ равен $\pi/6$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найдите длину стороны AC.

5. В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

7. Последовательность чисел $a_1, a_2 \ldots$ определяется следующим правилом: $a_1 = 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное,} \end{cases}$$

т.е. $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, $a_5 = 12$, $a_6 = 14$ и т.д. Найдите a_{1999}.

Вариант 8

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение

$$8\cos 6x - 12\sin 3x = 3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x-1|} \geq 2x + 5.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$$

4. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

5. Найдите все значения y, удовлетворяющие условию $y > \dfrac{1}{2}$, такие, что неравенство

$$16y^3+6y^3x-4y^3x^2-50y^2-11y^2x+ \\ +10y^2x^2+52y+4yx-8yx^2- \\ -18+x+2x^2>0$$

выполняется при всех x из интервала $1<x<2y$.

6. Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы — первый из точки A, второй из точки B – и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке B. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$4^x-2^x=56.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 2x=\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_\pi\left|x^2-1\right|=\log_{\sqrt{\pi}}|x|.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt[5]{y^5}\ge\sqrt[4]{y^4}.$$

5. Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

6. Дан треугольник ABC с основанием AB, равным $\sqrt{3}/2$, и высотой CH, опущенной на это основание и равной $\sqrt{6}/3$. Известно, что точка H лежит на AB и $AH:HB=2:1$. В угол ABC треугольника ABC вписана окружность, центр которой лежит на высоте CH. Найдите радиус этой окружности.

7. Для каждого значения параметра $b\le 0$ решите неравенство (относительно x)

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ge b.$$

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y=\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\right)\cdot\sqrt{\frac{25}{(x+2)^2}-1}.$$

2. Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения

$$2x^2-\left(\sqrt{3}+5\right)x-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=0.$$

Найдите значение $A=x_1+x_1x_2+x_2$ и выясните, какое из чисел больше: A или 1,999?

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x, y) системой неравенств

$$\begin{cases} x\left(x+y-\sqrt{2}\right)\le 0, \\ x^2+y^2\le 2. \end{cases}$$

4. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен 40°. Найдите углы треугольника ABC.

5. Решите уравнение

$$\left|\operatorname{ctg}^2 2x+8\sqrt{-\operatorname{ctg}2x}-3\right|= \\ =\left|\operatorname{ctg}^2 2x-8\sqrt{-\operatorname{ctg}2x}-3\right|.$$

6. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_3=-13$ и $a_7=3$. Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

7. Сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через вершины B, C, C_1 и через середину ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найдите площадь поверхности этого куба.

8. Решите неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2}\cos x\le\log_{x+19}\cos x.$$

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{4x-8}\left(x^2-2x-3\right)=1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2.$$

3. По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

4. Найдите все значения параметра a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x+6a\cos x-\sin x-3a=0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются, соответственно, серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB=3$, $AC=\sqrt{13}$ и $LK:KM=\frac{1}{3}$.

6. В пространстве заданы три луча DA, DB и DC, имеющие общее начало D, так что

$$\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=90°.$$

Сфера пересекает луч DA в точках A_1 и A_2, луч DB – в точках B_1 и B_2, а луч DC – в точках C_1 и C_2. Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площади треугольников DA_1B_1, DA_1C_1, DB_1C_1 и DA_2B_2 соответственно равны $\frac{15}{2}$, 10, 6 и 40.

Вариант 12

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{y-1}=6-y.$$

2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\angle BAC=\angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника BDC, равна $\frac{25\pi}{4}$.

1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

2) Зная, что

$$BC=3,\ AC=4,\ \angle BAD=90°,$$

найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

4. Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению – на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определите количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

5. Решите неравенство

$$\frac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\le 0.$$

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)} \geq$$

$$\geq \left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5;\ 6]$?

Вариант 13

(отделение экономики экономического факультета)

1. Решите неравенство

$$\log_{|x|-2}|x-3| \leq 0.$$

2. Решите неравенство

$$4\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14} \leq 14\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

3. Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

4. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

5. Решите уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

6. В треугольной пирамиде $SABC$ угол $\angle ACB = \alpha$, ребро $SC = d$ является диаметром сферы, пересекающей ребра SA и SB в их серединах. Найдите объем пирамиды, если $\angle SAC = \angle SBC = \beta$, причем $\beta < \frac{\pi}{4}$.

7. Найдите все значения b, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z| + \log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right) + b^2 = 0, \\ \left(\left(y^2-1\right)\cos^2 z - y\cdot\sin 2z + 1\right)\times \\ \quad\times\left(1+\sqrt{\pi+2z}+\sqrt{\pi-2z}\right) = 0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

2. Решите уравнение

$$x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;\ 3]$. Определите при каждом таком p множество значений функции $f(x)$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны, соответственно, 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x,\ y,\ z)$ удовлетворяют системе условий

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ a\cdot yz + a\cdot xz + a\cdot xy > xyz. \end{cases}$$

Вариант 15

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Расстояние в 160 км между пунктами A и $Б$ автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, – со скоростью 20 км/ч. Какую часть пути между A и $Б$ занимает ровная дорога?

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \geq \frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

3. В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

4. Решите уравнение

$$\log_{(1-2\cos z)}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0.$$

5. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos^3(z+4y+\pi/4) + \\ \quad + 1/\sin(2z+2y-\pi/4) = 0, \\ \cos(3z+\pi/4) + \\ \quad + 1/\sin^3(4z-2y-\pi/4) = 0. \end{cases}$$

Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\lg^2(2x-3)^2 + 4^{\left(3\log_4\sqrt[3]{2}\right)}\left(\frac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10}\right) = 0.$$

2. Упростив выражение

$$A = 1 - y + \frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy}+\left(3-y^{-1}\right)\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y^{-2}}}\, y^{\frac{5}{6}} x^{-\frac{1}{6}},$$

где $x > 0$, $y > 0$ – действительные числа, выясните, что больше: A или $\frac{5}{7}$.

3. Решите уравнение

$$\sin 9x = 6\sin 5x \cos 2x - \sin x.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{\pi}{8}$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{6}$ и наклонено к плоскости основания под углом $\frac{5\pi}{13}$. Определите объем пирамиды.

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7} \geq 1.$$

6. Окружности радиусов 2 и 6 с центрами, соответственно, в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке D. Найдите радиус вписанной в треугольник O_1O_2D окружности.

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - \log_2\left(y\sqrt{2}+6\right)^3 - 16 \geq y^4 - 3x - y^2, \\ x^2 - y^2 \leq \log_2\left(y\sqrt{2}+6\right) + x + 1. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. На край доски, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, кладут небольшую шайбу, масса которой в k

раз меньше массы доски. Шайбе щелчком сообщают скорость, направленную к центру доски. Если эта скорость больше u, то шайба соскальзывает с доски. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость шайбы будет в n раз больше u ($n > 1$)?

2. Неоднородная балка (рис.1) подвешена к потолку на трех одинаковых

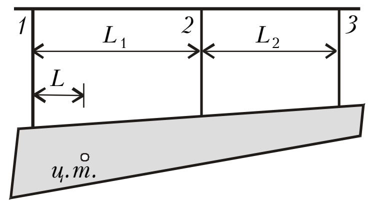

Рис. 1

в недеформированном состоянии легких резиновых шнурах так, что шнуры вертикальны и лежат в одной плоскости. Расстояния между шнурами L_1 и L_2, а между первым шнуром и центром тяжести балки (по горизонтали) L. Точки крепления шнуров к балке лежат на одной прямой. Найдите отношение сил натяжения первого и второго шнуров, считая деформации шнуров малыми.

3. На внутренней поверхности тонкого обода колеса массой M и радиусом R лежит груз малых размеров массой m. Коэффициент трения груза об обод $\mu \ll 1$. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, расположенной горизонтально. Пренебрегая массой спиц и втулки колеса, найдите максимальную скорость груза, при которой колебания колеса еще могут быть гармоническими.

4. В горизонтально расположенный цилиндр с поршнем, касающимся дна, через кран в дне накачали гелий. В результате поршень несколько передвинулся. Закрыв кран, цилиндр медленно нагрели, а затем начали охлаждать. Когда от гелия отвели в $n = 4$ раза меньшее количество теплоты, чем было им получено при нагревании, поршень начал двигаться. Найдите отношение сил трения и атмосферного давления, действующих на поршень, если отношение максимального объема гелия к его объему перед нагреванием $k = 5$.

5. Между поршнем и дном гладкого расположенного горизонтально цилиндра находится кусочек льда массой m и насыщенный водяной пар. В некоторый момент температура льда стала равной 0 °С, а объем пара стал равным V. Пренебрегая объемом образующейся воды и теплообменом пара и льда с другими телами, найдите перемещение поршня по прошествии достаточно большого промежутка времени. Площадь поперечного сечения цилиндра S, молярные теплоты плавления льда и парообразования воды λ и L, молярные теплоемкость и масса воды C и М. Опыт проводился при нормальном атмосферном давлении.

6. В плоский воздушный конденсатор параллельно его обкладкам вставили тонкую проводящую пластину, размеры которой совпадают с размерами обкладок. Обкладки соединены проводником. Пластина имеет заряд q. Какую минимальную работу нужно совершить против сил электрического поля, чтобы расстояние между одной из обкладок и пластиной изменить от начального a до конечного b, если площадь пластины S, а расстояние между обкладками конденсатора равно d и много меньше линейных размеров пластин?

7. К гальваническому элементу последовательно подключены два резистора. Сопротивление первого резистора в n раз меньше внутреннего сопротивления элемента, а сопротивление второго выбрано таким, что на нем выделяется максимально возможное количество теплоты. Во сколько раз изменится скорость растворения отрицательного электрода элемента, если эти резисторы подключить к нему, соединив их параллельно?

8. Тонкий стержень длиной L и массой m подвесили за концы на двух одинаковых легких нерастяжимых нитях в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ так, что его ось горизонтальна, а нити вертикальны. Затем через стержень пропустили заряд q столь быстро, что стержень практически не сместился из положения равновесия. Зная, что максимальная высота поднятия стержня много меньше длины нитей H, найдите максимальную вертикальную составляющую его скорости после прохождения заряда.

9. Чтобы лучше рассмотреть мелкие детали рисунка, человек берет лупу. Поднося ее к рисунку, он видит на нем резкое изображение нити лампочки, висящей над столом под потолком комнаты, когда расстояние между лупой и рисунком равно $b = 5$ см. Поднося лупу к глазу, человек рассматривает рисунок. Найдите увеличение изображения рисунка, если оно находится на расстоянии наилучшего зрения $D = 25$ см.

10. Угловое расстояние между максимумами первого и второго порядков синего света с длиной волны $\lambda_c = 0{,}44$ мкм, наблюдаемыми при освещении дифракционной решетки параллельным пучком света от ртутной лампы, падающим под углом $\alpha = 50°$, оказалось равным $\Delta\varphi = 5°$. При этом в спектре третьего порядка наблюдались две близкие желтые линии, угловое расстояние между максимумами которых было равно $\delta\varphi = 4{,}3'$. Найдите разность длин волн $\delta\lambda_ж$ желтого дублета ртути.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. В кабине лифта высотой $H = 2{,}5$ м, движущейся с ускорением, равным $a = 0{,}8$ м/с^2 и направленным вниз, с высоты $h = 0{,}5$ м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью v_0 относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

2. К грузику массой $M = 300$ г прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок (рис.2). На втором конце нити подвешен грузик массой $m = 200$ г. Когда блок заторможен, длина пружины $l = 15$ см. Какую длину l_1 будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины $l_0 = 10$ см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

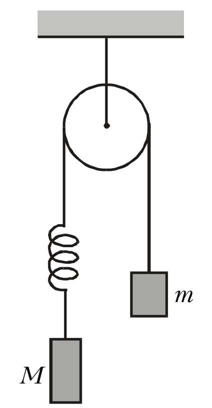

Рис. 2

3. Металлический стержень, изогнутый под углом $\varphi = 45°$, как показано на рисунке 3, вращается с угловой скоростью $\omega = 6$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси OO'. К концу стержня прикреплен груз массой $m = 0{,}1$ кг на расстоянии $l = 0{,}1$ м от точки O. Определите модуль F силы, с которой стержень действует на груз.

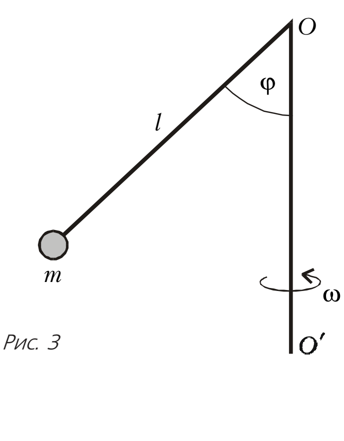

Рис. 3

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$.

4. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы с высоты $h = 2$ м перебросить через стенку высотой $H = 4$ м камень массой $m = 0{,}2$ кг? Стенка расположена на расстоянии $L = 4$ м от места бросания. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

5. С идеальным одноатомным газом проводят процесс *1—2*, показанный на рисунке 4. Во сколько раз (α) при этом изменяется средняя кинетическая энергия одной молекулы?

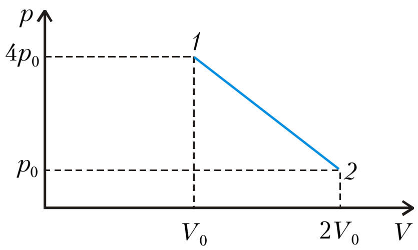

Рис. 4

6. С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.5). Найдите работу A, совершаемую газом за цикл, если известно, что

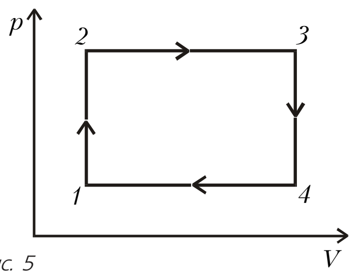

Рис. 5

температура в состоянии *1* равна $T_1 = 300$ К, а в состояниях *2* и *4* температура одна и та же и равна $T = 320$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

7. Батарея с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом присоединена к цепи, изображенной на рисунке 6. Сопротивление каждого из резисторов $R = 1$ Ом. Найдите напряжение U_{MN} на клеммах батареи. Сопротивлением всех соединительных проводов пренебречь.

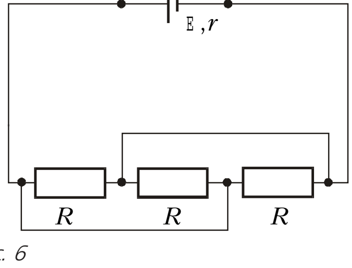

Рис. 6

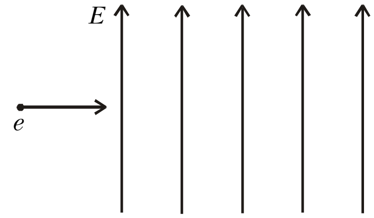

Рис. 7

8. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно силовым линиям (рис.7). Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$, которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $W_к = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.

9. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения $\alpha = 45°$, показатель преломления стекла $n = 1{,}41$. Найдите угол γ между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

10. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. По другую сторону линзы находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Найдите радиус r светового пятна на экране, если известно, что расстояние от источника до линзы $d = 30$ см, расстояние от линзы до экрана $b = 80$ см, фокусное расстояние линзы $F = 20$ см, а ее радиус $R = 3$ см.

Химический факультет

1. С наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, с высоты $h_1 = 2$ м соскальзывает небольшая шайба (рис.8). В конце спуска у

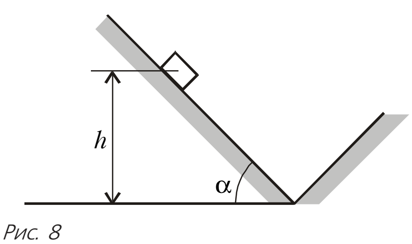

Рис. 8

основания наклонной плоскости шайба испытывает абсолютно упругое соударение со стенкой и поднимается вверх по наклонной плоскости на высоту $h_2 = 1{,}2$ м. Найдите коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью.

2. Два шарика одинаковых размеров – один деревянный, а другой из алюминия – связаны легкой и достаточно длинной нитью. Шарики опускают в водоем, и через некоторое время оказывается, что их погружение происходит с постоянной скоростью. Найдите натяжение нити при этом движении. Массы шариков $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Принять $g = 10\ \text{м/с}^2$.

3. По поверхности озера бегут волны со скоростью $u = 2$ м/с. Моторная лодка движется навстречу волнам со скоростью $v = 5$ м/с. С какой частотой волны бьются о нос лодки, если поплавок на поверхности воды колеблется с частотой $\nu_0 = 0{,}5$ Гц?

4. Мяч массой $m = 0{,}2$ кг отпустили без начальной скорости с высоты $H = 6$ м над полом. Найдите количество теплоты, выделившееся при первом ударе мяча о пол, если промежуток времени между первым и вторым ударами о пол составляет $\Delta t = 2$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10\ \text{м/с}^2$.

5. Два баллона с кислородом соединены трубкой с краном. Массы газа в обоих баллонах одинаковы. При закрытом кране давление в одном баллоне $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а в другом $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па. Какое давление установится в баллонах, если кран открыть? Температуру в баллонах считать постоянной и одинаковой, а газ – идеальным.

6. Батарею параллельно соединенных конденсаторов с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ сначала подсоединили к источнику с ЭДС, равной $\mathcal{E} = 6$ В (ключ K в положении *1* на рисунке 9). Затем ключ переводят в положение *2*, соединяя батарею с конденсатором емкостью $C_3 = 3$ мкФ. Найдите заряд, который получит конденсатор емкостью C_3.

7. Концентрация электронов проводимости в чистом германии при комнатной температуре $n = 3 \cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}$. Найдите, какова доля ионизированных атомов германия (n^+). Считать, что каждый ионизированный атом теряет по одному электрону. Плотность германия $\rho = 5400\ \text{кг/м}^3$, молярная масса $М = 0{,}073$ кг/моль. Число Авогадро принять равным $N_А = 6 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$.

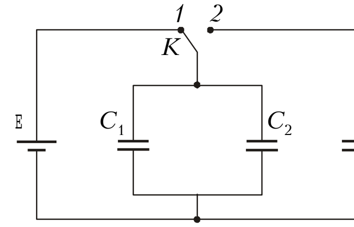

Рис. 9

8. Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором, как показано на рисунке 10. Действующее значение

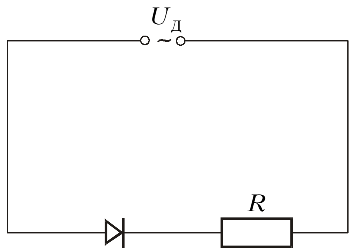

Рис. 10

напряжения источника $U_д = 20$ В. Сопротивление резистора $R = 12$ Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если средняя мощность, выделяющаяся в цепи, равна $P = 10$ Вт. Обратным током диода пренебречь.

9. В пространстве с однородными электрическим и магнитным полями движется протон. Линии магнитной индукции и линии напряженности этих полей параллельны. В тот момент, когда скорость протона перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, его ускорение, вызванное действием этих полей, равно $a = 10^{12}$ м/с^2. Найдите напряженность электрического поля E, если скорость протона $v = 60$ км/с, индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Отношение заряда протона к его массе принять равным $q/m = 10^8$ Кл/кг.

10. Имеется линза с оптической силой $D = +2$ дптр. Стержень располагают перпендикулярно главной оптической оси поочередно в двух местах на разных расстояниях от линзы (по одну сторону от нее). В обоих случаях линейные размеры оптического изображения оказываются в $\Gamma = 10$ раз больше длины стержня. Найдите расстояние между этими положениями стержня.

Публикацию подготовили А.Бородин, В.Галкин, Н.Григоренко, Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, В.Серов, А.Склянкин, В.Сушко, В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков, Б.Щедрин