$= AC\cdot CB = 4r(R-r)$ (см. рис.3 статьи) находим, что площадь круга, построенного на диаметре CD, равна $\pi r(R-r)$.

2. Пусть F и G – середины отрезков AC и AB (см. рис.4 статьи); K – центр окружности, касающейся отрезка CD слева; ее радиус обозначим через x. Из треугольника GKH находим $KH^2 = (R-x)^2 - (2r-R-x)^2$, а из треугольника FKH получаем $KH^2 = (r+x)^2 - FH^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2$. Отсюда $x = r(R-r)/R$. Полученное выражение симметрично относительно r и $(R-r)$, следовательно, радиус окружности, касающейся отрезка CD справа, тот же.

3. Следует учесть, что $\operatorname{tg}(\varphi_1+\ldots+\varphi_n) = 2n(R-r)/(R+r)$, а поэтому $\operatorname{tg}\varphi_n = 2(R-r)(R+r)\Big/\left((R+r)^2+4n(n-1)(R-r)^2\right)$.

4. Биссектриса угла LBD' перпендикулярна всем окружностям Γ', γ_n', $\tilde{\gamma}_n'$ (см. рис.10 статьи). При инверсии она перейдет в дугу окружности, ортогональную Γ, γ_n, $\tilde{\gamma}_n$ и проходящую через точки A и B. Центром этой окружности является точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра к AB. Этот центр находится на расстоянии $R\sqrt{2}$ от точки A.

5. Пусть $R_n > R_{n-1}$ – радиусы соседних окружностей. Соединим их центры. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является полученный отрезок, а катеты параллельны BL и BD'. Имеем $R_n + R_{n-1} = (R_n - R_{n-1})\cdot\sqrt{2}$, откуда $R_n : R_{n-1} = (\sqrt{2}+1) : (\sqrt{2}-1)$.

Движение по окружности

1. $T = \rho v^2\pi d^2/4$, где ρ – плотность воды.

2. $\omega = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{l}}$. **3.** $L \approx 2\pi m v_0/(eB)$.

4. $\vec{V} = \dfrac{[\vec{E},\vec{B}]}{B^2} + \vec{v}_{0\parallel}$.

5. $\tau = \dfrac{\sqrt{R}}{a_t}\left(\mu^2 g^2 - 4a_t^2\right)^{1/4} \approx 27$ с, где $a_t = 2$ м/с^2.

6. $T = 3\sqrt{(QE)^2+(mg)^2} - 2QE$.

7. $\mu = \dfrac{(m_1-m_2)(3-2\cos\alpha)\sin\alpha}{M+(m_1+m_2)(3-2\cos\alpha)\cos\alpha} \approx \dfrac{m_1-m_2}{M}\alpha = 4{,}4\cdot 10^{-3}$, где $\alpha = 10°$.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\sqrt{2}$; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $1/3$.

3. [3; 5]. *Указание* Условие задачи равносильно тому, что сумма данных выражений неположительна, т.е. что $|y| \le |y-15|-15$, где $y = x^2-8x+15$.

4. 24. *Указание.* Треугольники ABC и ADE подобны, так как около четырехугольника $ACED$ можно описать окружность ($\angle CED = 180° - (\angle ECD + \angle EDC) = 180° - (\angle BAC + \angle BAD) = 180° - \angle CAD$).

5. $a\in(-\infty;-3)\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$f(x)=\frac{(y-2a-2)(y+a-3)}{(a+3)(y+3a+3)} \le 0, \text{ где } y = 2^x.$$

Если $a + 3 < 0$, то неравенство справедливо при всех $y > y_0$, где y_0 – наибольший из корней числителя и знаменателя. При $a + 3 > 0$ должно быть либо $f(0)\le 0$, либо $3a + 3 = 0$. В обоих случаях неравенство справедливо на некотором промежутке $0<y<\alpha$, где $\alpha > 0$. Но тогда множество решений исходного неравенства содержит луч $x<\log_2\alpha$.

6. 126. *Указание.* Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – площади треугольников SBC, SAB, SAD и SCD соответственно, V_1, V_2, V_3, V_4 – объемы треугольных пирамид $ESBC$, $ESAB$, $ESAD$ и $ESCD$. Поскольку точка E одинаково удалена от боковых граней (она лежит на прямой SO!), $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = S_{EBC} : S_{EAB} : S_{EAD} : S_{ECD}$ (последнее равенство получается из того, что треугольные пирамиды с вершиной S имеют общую высоту). Следовательно,

$$S_2 = S_1\cdot\frac{S_{EAB}}{S_{EBC}} = S_1\cdot\frac{AD}{BC} = 20,$$

$$S_3 = S_2\cdot\frac{AD}{BC} = 50,$$

$$S_4 = S_1\cdot\frac{AD}{BC} = 20.$$

Осталось заметить, что отношение полной поверхности $S_{\text{полн}}$ к площади основания $S_{\text{осн}}$ равно отношению объемов $V_{SABCD} : V_{OABCD} = h : r = SE : OE = 9/2$, отношение $S_{\text{полн}} : S_{\text{бок}} = \dfrac{9}{7}$. Откуда $S_{\text{полн}} = 98\cdot\dfrac{9}{7} = 126$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-11/6]\cup\{0\}$. **2.** -3.

3. $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно совокупности $x = 2\pi k$, $\sin(x+\varphi) = \dfrac{1}{2}$, решениям которой соответствуют 3 точки тригонометрической окружности, которые должны располагаться в вершинах правильного треугольника.

4. а) 1 : 1, 5 : 9; б) 5 : 21. *Указание.* Точки L и N лежат на средней линии трапеции, $AB = AK$, $KD = CD$, $AK : KD = 9 : 5$.

Углы KLM и KNM прямые, точки K, L, M, N лежат на одной окружности. Отсюда следует, что треугольники KLM и DNK подобны, откуда $\dfrac{KM}{KD} = \dfrac{LM}{KN}$, аналогично

$$\frac{MN}{KL} = \frac{KM}{AK} = \frac{KM}{KD}\cdot\frac{KD}{AK} = \frac{5}{21}.$$

5. $a\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$. *Указание.* Пусть $f(x)$ – числитель, а $g(x)$ – знаменатель дроби из условия задачи. Поскольку $f(0) = g(0) < 0$, а разность $f(x) - g(x) = (a^2-7a+13)x$ положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$, корни трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ различны и перемежаются (рис.5). Решения неравенства удовлетворяют условию, если и только если $(x_3-x_1)+(x_4-x_2)\ge 1$, или, по теореме Виета,

$$a^2-7a+12\ge 0.$$

6. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{31}{5}}$. *Указание.* Центры шаров – вершины треугольника со сторонами 3, 6, 7 и площадью $S = 4\sqrt{5}$. Точки касания с одной из плоскостей – вершины треугольника со сторонами $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{10}$ и площадью $S' = \sqrt{31}$. Угол φ между плоскостями этих треугольников удовлетворяет соотношению $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$. Дальнейшее ясно.

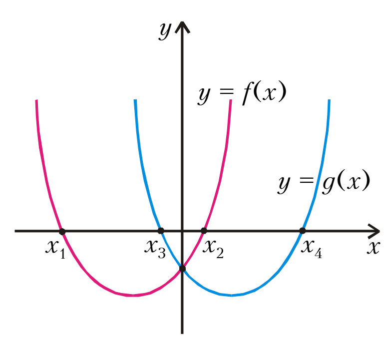

Рис. 5