Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №4 за 1999 г.)

1. *Ответ*: нельзя. Периметр квадрата 4×4 выражается рациональным числом, а гипотенуза прямоугольного треугольника – «половинки» единичного квадрата – равна $\sqrt{2}$, т.е. числу иррациональному. Следовательно, гипотенузы всех фигурок должны спрятаться внутри квадрата 4×4, располагаясь парами гипотенуза к гипотенузе. Но в пяти фигурках гипотенузы расположены параллельно, а в трех – перпендикулярно друг к другу. Это значит, что любая попытка сложить квадрат будет неудачной, так как по крайней мере одна гипотенуза окажется в паре с перпендикулярной ей гипотенузой.

2. а) *Ответ*: 5 поколений. Чтобы в этом убедиться, сначала покажем, что 6 поколений микробов на листе не поместятся. Назовем *ходом* передвижение от любой клетки к любой соседней с ней клетке. Поскольку микробы очередного поколения находятся в клетках, соседних с теми, где содержатся микробы предыдущего поколения, то микробы шестого поколения (и всех предыдущих) должны находиться в пределах области клеток, до которых можно добраться от исходной клетки, где первоначально был микроб первого поколения, не более чем за 5 ходов. Так как при каждом ходе происходит перемещение по вертикали или по горизонтали, то нетрудно изобразить эту «отступную» область, имеющую характерный ступенчатый вид (рис.1).

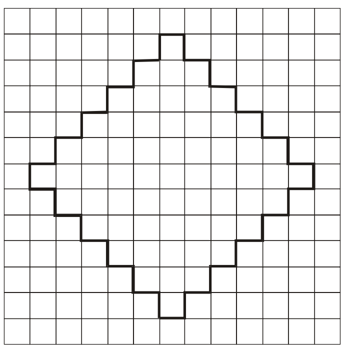

Рис. 1

Легко подсчитать (или непосредственно, или используя арифметическую прогрессию), что изображенная область содержит 61 клетку. Однако общее число микробов с первого по шестое поколение включительно равно $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^5 = 2^6 - 1 = 63 > 61$. Таким образом, шестому поколению микробов места уже не хватит.

С другой стороны, 5 поколений микробов вполне могут разместиться. Вот один из примеров их итогового расположения (рис.2; здесь не указано, какой микроб каким конкретно порожден, поскольку восстановить это несложно).

			5		5			
		5	4	5	4	5		
	5	4	3		3	4	5	
		5	2	1	2	5		
	5	4	3		3	4	5	
		5	4	5	4	5		
			5		5			

Рис. 2

б) *Ответ*: 7 поколений. Идея решения – абсолютно та же самая, и, несмотря на кажущуюся сложность по сравнению с предыдущей задачей, количественная оценка также дает верное значение. Убедимся, что 8 поколений разместить невозможно. В данном случае допускаются также и ходы по диагонали, поэтому максимальная область размещения микробов (содержащая клетки, до которых можно добраться за 7 ходов) представляет собой квадрат со стороной $2 \times 7 + 1 = 15$ клеток с центром в исходной клетке. Всего в нем $15^2 = 225$ клеток. В то же время общее число микробов в восьми поколениях равно $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^7 = 2^8 - 1 = 255 > 225$. Семь же поколений разместить можно – на рисунке 3 показан пример их итогового расположения.

3. а) *Первое решение.* Покажем, что если число x^2 оканчивается на 21, то стоящая в разряде сотен цифра числа x должна быть нечетной. Число x оканчивается либо на 1, либо на 9. Пусть $x = 10a + 1$, тогда $x^2 = (10a+1)^2 = 100 \cdot a^2 + 10 \cdot 2a + 1$, и следовательно, число $2a$ оканчивается на 2, а само число a – либо на 1, либо на 6. Если $a = 10b + 1$, то $x^2 = (100b+11)^2$, и в разряде сотен числа x^2 стоит нечетная цифра. Аналогично, если $a = 10b + 6$, то $x^2 = (100b+61)^2$ – в разряде сотен опять стоит нечетная цифра.

	7	7	7	7		7		7		7				
	7	6	7	6	6	6	6		6	6	7			
	7	6	5	7	5	7	5	7	5	7	7			
		7	7	4		4		4	7	6				
	7	6	5	7	3	7	3		5	7	7	7		
	7	6		4	6	2	7	6	7	6	7	6	7	
		6	5	7	5	7	1	7	5	7	5	6		
	7	6	7	6	7	6	7	2	6	4		6	7	
		7	7	7	5		3	7	3	7	5	6	7	
				6	7	4		4		4	7	7		
			7	7	5	7	5	7	5	7	5	6	7	
			7	6	6		6	6	6	6	7	6	7	
				7		7		7		7	7	7	7	

Рис. 3

Случай $x = 10a + 9$ разбирается аналогично.

Итак, если x^2 оканчивается на 21, то в разряде сотен числа x^2 не может стоять цифра 2. Очевидно также, что $x^2 \neq 21$, поэтому ни при каких натуральных $x > 1$ уравнение $x^2 + 1 = \overline{22\ldots2}$ не имеет решений.

Второе решение. Если бы в разряде сотен числа x^2 стояла четная цифра, то при делении на 8 число x^2 давало бы в остатке 5, а этого быть не может (квадрат любого натурального числа при делении на 8 дает в остатке либо 0, либо 1, либо 4).

б) *Первое решение.* Предположим, такое число x существует, тогда, разделив $77\ldots76$ на 4, получим квадрат, оканчивающийся на 19. Этого быть не может, поскольку хотя бы одна из двух последних цифр квадрата всегда четна. Следовательно, уравнение $x^2 + 1 = \overline{77\ldots7}$ также ни при каких натуральных $x > 1$ решений не имеет.

Второе решение. Число $\overline{777\ldots76}$ при делении на 7 дает остаток 6, однако квадрат натурального числа при делении на 7 не может давать такой остаток.

4. В параллелограмме $ABCD$ проведем хорду $PQ \parallel AD$. Через точку Q проведем два отрезка QN и QM до пересечения со сторонами параллелограмма AD и BC параллельно его диагоналям: $QN \parallel AC$; $QM \parallel BD$. Через точку P и центр параллелограмма O проведем прямую до пересечения со стороной CD; получим точку R. Докажем, что четырехугольник $PMRN$ – искомый.

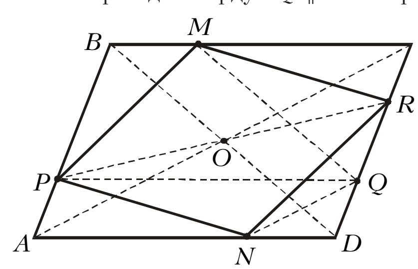

Рис. 4

По теореме Фалеса $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{CM}{BM}$. Так как точки N и M делят равные отрезки AD и BC в равном отношении, то $AN = MC$, $ND = MB$. Из равенства $\Delta APO = \Delta CRO$ следует $AP = CR$. Отсюда с учетом равенства углов A и C получаем $\Delta APN = \Delta CRM$ и, в частности, $PN = MR$. Так как, к тому же, при $AD \parallel BC$ углы ANP и CMR равны, то $MR \parallel PN$ и, следовательно, четырехугольник $PMRN$ – параллелограмм.

Докажем, что площади треугольников APN и NRD равны (отсюда будет следовать, что площади всех треугольников APN, NRD, CMR, BPM также равны, поскольку $\Delta BPM = \Delta DRN$, $\Delta APN = \Delta CRM$).

По свойству сторон параллелограмма $AP = QD$. С учетом $AP = CR$ отсюда получаем $CQ = RD$ и $AN : ND = CQ : QD = RD : QD = k$. Треугольники APN и NQD имеют равные