8. Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором, как показано на рисунке 10. Действующее значение

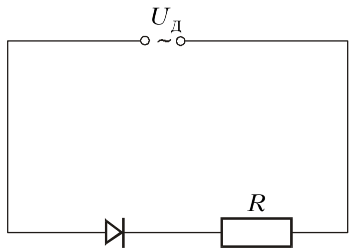

Рис. 10

напряжения источника $U_д = 20$ В. Сопротивление резистора $R = 12$ Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если средняя мощность, выделяющаяся в цепи, равна $P = 10$ Вт. Обратным током диода пренебречь.

9. В пространстве с однородными электрическим и магнитным полями движется протон. Линии магнитной индукции и линии напряженности этих полей параллельны. В тот момент, когда скорость протона перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, его ускорение, вызванное действием этих полей, равно $a = 10^{12}$ м/с^2. Найдите напряженность электрического поля E, если скорость протона $v = 60$ км/с, индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Отношение заряда протона к его массе принять равным $q/m = 10^8$ Кл/кг.

10. Имеется линза с оптической силой $D = +2$ дптр. Стержень располагают перпендикулярно главной оптической оси поочередно в двух местах на разных расстояниях от линзы (по одну сторону от нее). В обоих случаях линейные размеры оптического изображения оказываются в $\Gamma = 10$ раз больше длины стержня. Найдите расстояние между этими положениями стержня.

Публикацию подготовили А.Бородин, В.Галкин, Н.Григоренко, Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, В.Серов, А.Склянкин, В.Сушко, В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков, Б.Щедрин

Две задачи Архимеда

(Начало см. на с.41)

друг друга внутренним образом. Как видно из доказательства, утверждение остается в силе, если эти окружности будут касаться друг друга внешним образом; более того, оно верно и при замене одной из них на прямую (предельный случай окружности), касающуюся другой окружности. Если же исходные окружности или прямая и окружность не касаются друг друга, а пересекаются, то картина существенно изменится.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда окружность перпендикулярна прямой. Впишем в полукруг, построенный на диаметре $AB = 2R$, окружность Γ максимального радиуса (она касается диаметра в точке D), а затем по обе стороны от нее впишем две последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{\tilde\gamma_n\}$ попарно касающихся окружностей (рис.10). Вычислим радиусы r_n окружностей γ_n и $\tilde\gamma_n$.

Для этого произведем инверсию с центром A и радиусом $2R$. В результате полуокружность, построенная на AB, перейдет в луч BL, перпендикулярный прямой AB; вписанные окружности перейдут в окружности Γ', γ'_n, $\tilde\gamma'_n$, попарно касающиеся друг друга и сторон $\angle LBD'$. Так как D' – точка, инверсная точке D, то радиус окружности Γ' равен $2R$ (проверьте), радиусы окружностей γ'_n возрастают с увеличением n, а $\tilde\gamma'_n$ – убывают. Отметим интересное свойство окружностей, вписанных в полукруг: точки их попарного касания расположены на дуге окружности радиуса $R\sqrt{2}$, проходящей через точки A и B, причем окружности Γ, γ_n, $\tilde\gamma_n$ перпендикулярны этой дуге.

Упражнения

4. Докажите этой свойство.

5. Покажите, что радиусы любых двух соседних окружностей, вписанных в угол LBD', относятся как $(\sqrt2+1):(\sqrt2-1)$.

Для последовательности γ'_n расширяющихся окружностей, следующих за Γ', легко найти радиус n-й окружности $R_n = 2R\left(\sqrt2+1\right)^{2n}$. Ясно, что на таком расстоянии от B расположена точка C'_n (на рисунке она не изображена) касания γ'_n с прямой AB, следовательно, от центра инверсии она находится на расстоянии $d'_n = 2R\left(1+\left(\sqrt2+1\right)^{2n}\right)$. Обозначим через d_n расстояние от центра инверсии до точки C_n касания окружности γ_n диаметра AB. Очевидно, $d_n = 2R\Big/\left(1+\left(\sqrt2+1\right)^{2n}\right)$. Из гомотетии окружностей γ_n и γ'_n имеем $R_n : r_n = d'_n : d_n = \left(1+\left(\sqrt2+1\right)^{2n}\right)^2$. Поэтому

$$r_n = \frac{\left(\sqrt2+1\right)^{2n}\cdot 2R}{\left(1+\left(\sqrt2+1\right)^{2n}\right)^2} = \frac{2R}{\left(\left(\sqrt2-1\right)^n+\left(\sqrt2+1\right)^n\right)^2}.$$

Ответ получен.

Найдем отношение

$$R:r_n = \left(\frac{\left(\sqrt2+1\right)^n+\left(\sqrt2-1\right)^n}{\sqrt2}\right)^2 = \frac{\left(3+2\sqrt2\right)^n+\left(3-2\sqrt2\right)^n}{2}+1.$$

Числа $b_n = \dfrac{\left(3+2\sqrt2\right)^n+\left(3-2\sqrt2\right)^n}{2}$ имеют древнюю историю. Они возникли еще у древнегреческого математика Теона Смирнского (II в.) в процессе приближения числа $\sqrt2$ рациональными. Он рассмотрел две последовательности $\{\beta_k\}$ и $\{\alpha_k\}$:

1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, …

1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, …

удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_1=\beta_1=1,\ \alpha_{k+1}=\alpha_k+\beta_k,$$
$$\beta_{k+1}=2\alpha_k+\beta_k,$$

и показал, что отношения β_k/α_k образуют последовательные приближения числа $\sqrt2$. Встретившиеся у нас числа b_n равны β_{2n}.

Заметим, что числа, стоящие на четных местах последовательности $\{\alpha_n\}$, имеют вид

$$a_n = \frac{\left(3+2\sqrt2\right)^n-\left(3-2\sqrt2\right)^n}{2},$$

а пары (b_n, a_n) задают общее решение во множестве натуральных чисел уравнения Пелля $x^2-2y^2=1$, у которого своя интересная история.