Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравните $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right)$ и $\frac{19\pi}{24}$.

2. На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - \left(2 - \sqrt{3}\right)x$, пересекает ее в точках A и B. Найдите сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

3. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4} + 2\right| \geq -3 + \log_{\frac{1}{\pi+1}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды S, равны $\sqrt{2}$. Известно, что $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найдите высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника $ABCD$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}14x + 3\operatorname{ctg}14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

6. В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle ACB = 75°$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)

1. Решите уравнение

$$\sin x - \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1} = x + 4.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{1}{\log_9(x+5)}.$$

4. В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB, а точка M – на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O, $AN : NB = 2 : 3$, $BO : OM = 5 : 2$. Найдите $CO : ON$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

6. В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = p$, $MN = q$. Найдите PQ.

7. При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leq x < 2\pi$?

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B_1 и D параллельно прямой AC. Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной B.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\left|2 - \frac{1}{x-4}\right| < 3.$$

3. В равнобочную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, $BC : AD = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите AB.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2\cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5\cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}.$$

6. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой прямой взята точка B так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найдите ON.

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро SA равно b. Сфера радиуса $\frac{b}{2}$ касается плоскости SAC в точке C и проходит через точку B. Найдите $\angle ASC$.

8. Для любого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right) > 1$$

и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leq 2.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right)\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\log_{3-x}(2x+1)\right)\left(\log_{2x+1}x^2\right) \leq \left(\log_{3-x}(3x+1)\right)\left(\log_{3x+1}(x+2)\right).$$

4. В треугольнике ABC угол $\angle B$ равен $\pi/6$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найдите длину стороны AC.

5. В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

7. Последовательность чисел $a_1, a_2 \ldots$ определяется следующим правилом: $a_1 = 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное}, \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное}, \end{cases}$$

т.е. $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, $a_5 = 12$, $a_6 = 14$ и т.д. Найдите a_{1999}.

Вариант 8

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение

$$8\cos 6x - 12\sin 3x = 3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x-1|} \geq 2x + 5.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$$

4. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

5. Найдите все значения y, удовлетворяющие условию $y > \frac{1}{2}$, такие, что