Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)

1. Решите уравнение

$$\left(x^2+4\right)\lg\sin^2 3x + x^2\lg\cos^2 2x = 4\lg\left(\cos 2x\sin^3 3x\right).$$

2. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый – со знаком «плюс», второй – со знаком «минус» и т.д.) равна $\frac{20}{27}$. Найдите знаменатель прогрессии.

3. Найдите все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x$$

и

$$|x|(|x|-|x-8|)+24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найдите AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \ge \frac{5a+5}{2\left(2^x+3a+3\right)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

6. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\le 3^{x^2-2}+27^{2x+3}.$$

2. Решите уравнение

$$\left|\log_2(2x+7)\right| = \log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right).$$

3. При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right)=\sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

4. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+\left(2a^2+6\right)x-a^2+2a-3}{x^2+\left(a^2+7a-7\right)x-a^2+2a-3}<0,$$

не меньше 1.

6. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-99», апрель)

1. Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 ч, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между B и C.

2. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right| \ge 9\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right|.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x\cos x.$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ADB, равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найдите AD.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 – общие перпендикуляры к парам отрезков A_1C_1 и AB_1, BC_1 и AC, DC_1 и AD_1 соответственно. Объем параллелепипеда равен V, радиус описанной сферы равен R, а сумма длин ребер AA_1, AB и AD равна m. Найдите сумму объемов пирамид $AA_1M_1N_1$, ABM_2N_2 и ADM_3N_3.