

По второму закону Ньютона,

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A,$$

или

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$0 = -\rho_{\text{ш}} Vg - T \cos \alpha + \rho_{\text{в}} Vg,$$

а проецируя силы и ускорение в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\rho_{\text{ш}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = \rho_{\text{в}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha) - T \sin \alpha.$$

Исключая  $T$  из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r - l \sin \alpha}} \approx 11 \text{ с}^{-1}.$$

\*\*\*

Умение описывать движение по окружности может существенно помочь при анализе движений по еще более сложным траекториям: винтовой линии или циклоиде. Действительно, движение по винтовой линии можно представить в виде суперпозиции движения по окружности и движения по прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через точку окружности. Движение по циклоиде тоже возможно представить как одновременные два движения: по окружности и по прямой, лежащей в плоскости окружности.

**Задача 3.** По длинной проволочной винтовой линии с шагом  $H$ , ось которой вертикальна, скользит бусинка. Радиус воображаемой цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия, равен  $R$ . Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке  $\mu$  ( $\mu < H/(2\pi R)$ ). Найдите установившуюся скорость  $v_*$  скольжения бусинки. Ускорение свободного падения  $g$ .

На бусинку действуют силы тяжести  $m \vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . При этом  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , как обычно, а  $N = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ , где  $\vec{N}_1$  – горизонтальная составляющая, направленная к оси винтовой линии, а  $\vec{N}_2$  лежит в одной вертикальной плоскости с  $m \vec{g}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.3).

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что

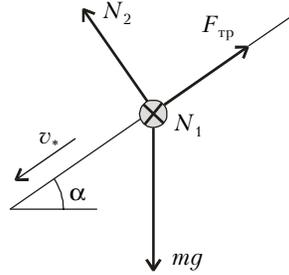


Рис. 3

естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью  $v_*$ . Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся по вертикали вниз со скоростью  $v_* \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона вектора скорости к горизонту и  $\operatorname{tg} \alpha = H/(2\pi R)$ . В выбранной системе бусинка равномерно движется по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v_* \cos \alpha$ , при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно  $(v_* \cos \alpha)^2 / R$ . Из второго закона Ньютона

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, находим

$$m \frac{(v_* \cos \alpha)^2}{R} = N_1.$$

В вертикальной плоскости справедливо равенство

$$0 = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

откуда, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, получим

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha.$$

Из этих соотношений с учетом того, что  $F_{\text{тр}} = \mu \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ , окончательно имеем

$$v_* = (gR/\mu)^{1/2} \left( (\operatorname{tg}^2 \alpha - \mu^2) (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \right)^{1/4}$$

**Задача 4\*.** Протон движется в однородном и постоянном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Векторы начальной скорости  $\vec{v}_0$  и индукции  $\vec{B}$  образуют угол  $\alpha$ . Определите вид траектории протона в лабораторной системе отсчета. Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением для магнитной составляющей силы Лоренца имеем

$$m \vec{a} = e [\vec{v}, \vec{B}],$$

где  $[\vec{v}, \vec{B}]$  – векторное произведение.<sup>1</sup> Проанализируем это уравнение. Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}$ ; следовательно, эта сила не совершает работы, и по теореме об изменении кинетической энергии величина  $v$  скорости протона остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0$ . Сила Лоренца перпендикулярна также вектору индукции  $\vec{B}$ ; следовательно, составляющая  $v_{\parallel}$  вектора скорости, параллельная вектору индукции, тоже остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0 \cos \alpha$ . Тогда величина  $v_{\perp}$  перпендикулярной вектору индукции составляющей скорости протона тоже остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0 \sin \alpha$ .

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории со скоростью  $\vec{V} = v_{\parallel}$ . С учетом закона сложения скоростей и представления скорости в виде суммы составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

получаем, что в рассматриваемой системе протон движется в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , с постоянной по величине (но не по направлению!) скоростью  $\vec{v}' = \vec{v}_{\perp}$ . Уравнение движения принимает вид

$$m \vec{a}' = e [\vec{v}_{\perp}, \vec{B}].$$

Отсюда следует, что величина вектора ускорения равна

$$a' = \frac{e v_{\perp} B}{m} = \frac{e B v_0 \sin \alpha}{m}$$

и постоянна, а его направление перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}_{\perp}$ . Значит, в рассматриваемой системе отсчета протон равномерно движется по окружности радиусом

$$R = \frac{v_{\perp}^2}{a'} = \frac{m v_0 \sin \alpha}{e B}$$

с частотой

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{e B}{m},$$

не зависящей от скорости.

Соответственно, движение протона относительно лабораторной системы отсчета осуществляется по винтовой

<sup>1</sup> При решении этой и следующей задач используется понятие векторного произведения, которое известно учащимся специализированных классов физико-математического профиля. (Прим. ред.)