Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Как студент огород поливал» предназначена девятиклассникам, заметка «Сколько пузырьков в шампанском?» – десятиклассникам и одиннадцатиклассникам.

Как студент огород поливал

А.СТАСЕНКО

Как-то раз, давным-давно, попросила бабушка внука-студента огород полить. И шланги были, и воду компрессором подали – да вот в чем закавыка: Студент был умный да еще вычитал, что «уже в 450 году до нашей эры «Кратет высказал мнение о необходимости сначала постепенной, а потом и полной замены ручного труда... автоматами». Опустил он буйну голову на широку грудь, а в груди была дума крепкая. Вспомнил он сегнерово колесо и представил себе трубку с концами, отогнутыми в противные стороны, да насаженную на другую трубу, подающую воду, причем та, что первая, могла свободно вращаться за счет реакции вытекающей струи. Ввел Студент обозначения (рис.1) и снова задумался.

Если $v_в$ — скорость движения воды внутри трубки с площадью сечения S, то секундный расход воды через одно отверстие равен $Q = \rho_в v_в S$. А так как жидкость несжимаема и, значит, ее плотность $\rho_в$ постоянна, при постоянной величине S скорость воды одинакова в любом сечении трубки. (Тут Студент почувствовал, что он применил закон сохранения массы.) Если в результате выброса воды трубка длиной $2l$ приобрела угловую скорость ω, то линейная (окружная) скорость ее концов будет равна ωl и направлена противоположно скорости $v_в$ движения воды, так что в системе координат, связанной с огородом, скорость истечения воды будет равна по величине $v_0 = v_в - \omega l$. Следовательно, поток импульса через одно отверстие равен $Q(v_в - \omega l)$, а его размерность есть $\frac{кг}{с}\cdot\frac{м}{с} \equiv Н$. Но ведь это же размерность силы F!

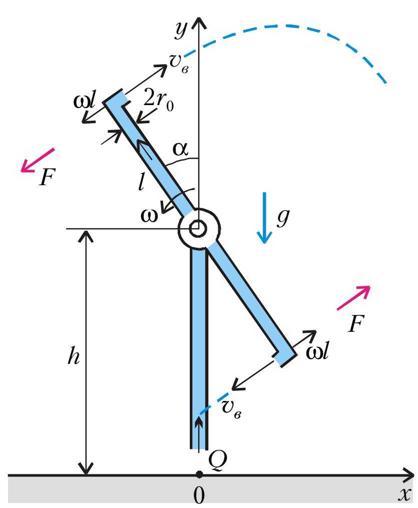

Рис. 1

Таким образом, имеется пара сил – две равные по величине силы, параллельные и противоположно направленные, причем l – плечо каждой силы относительно оси вращения. В результате на трубку действует момент сил

$$F \cdot 2l = 2Q(v_в - \omega l)l. \qquad (1)$$

Но до какой угловой скорости может раскрутиться трубка? И вообще, мешает ли ей что-то неограниченно ускоряться во вращательном движении? Конечно. Ну например, момент сил трения во втулке (куда же деться от трения!), сопротивление воздуха... Уж очень хотелось Студенту сказать привычные слова «сопротивлением воздуха пренебречь», но как честный человек он решил прежде всего сделать численную оценку.

Ему давно было известно, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу пропорциональна квадрату скорости v тела относительно воздуха, площади поперечного сечения $S_\perp$ тела и плотности воздуха ρ. Но чтобы ею пренебречь, нужно эту силу сравнить с какой-нибудь другой, которая предполагается существенно важной. Скажем, с потоком импульса массы воды, истекающей из трубки (в системе координат, связанной с самой трубкой), равным $Qv_в$:

$$\frac{\rho v^2 S_\perp}{Qv_в} \le \frac{\rho\cdot(\omega l)^2\cdot 2r_0 l}{\rho_в \pi r_0^2 v_в \cdot v_в} \sim$$

$$\sim \left(\frac{\rho}{\rho_в}\right)\left(\frac{\omega l}{v_в}\right)^2\left(\frac{l}{r_0}\right).$$

Здесь для усиления неравенства взято наибольшее изменение скорости: $v = \omega l$, достигаемое на конце трубки, и, конечно, пренебрежено тем, что трубка при своем вращении увлекает в движение воздух. Итак, завершим оценку. Ясно, что ωl не может превосходить $v_в$ – иначе трубка не будет раскручиваться, отношение плотностей воздуха и воды $\rho/\rho_в$ составляет приблизительно 10^{-3}, и если взять трубку «разумных размеров» – например, $l \sim 10$ см и $2r_0 \sim 1$ см, то для искомого отношения двух сил получим величину порядка и менее 10^{-2}. Значит, с точностью до процентов можно и в самом деле пренебречь сопротивлением воздуха.

Что же осталось? Осталось приравнять ускоряющий момент реактивной силы струи (1) тормозящему моменту силы трения $M_{тр}$:

$$2Q(v_в - \omega l)l = M_{тр}.$$

Отсюда получим скорость истечения воды из трубки (в системе координат, связанной с огородом):

$$v_0 = v_в - \omega l = \frac{M_{тр}}{2lQ}$$

(как и предполагалось выше, ωl не превосходит скорости выброса воды относительно трубки).

А что дальше? А дальше, как говорят ученые, «проблема свелась к» известной школьной задаче о движении тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 из точки с координатами (см. рис.1)

$$x_0 = -l\sin\alpha,\ y_0 = h + l\cos\alpha.$$

Решение этой задачи дает

$$x = -l\sin\alpha + v_0\cos\alpha\cdot t,$$

$$y = h + l\cos\alpha + v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

(Окончание см. на с. 34)