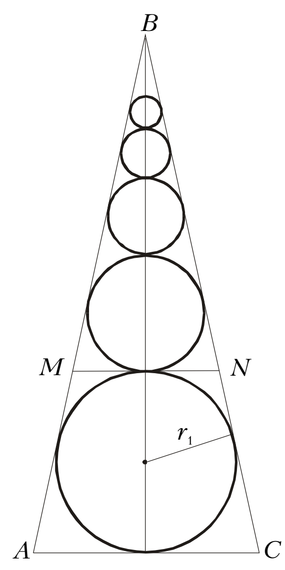
НАМ ПИШУТ

Метод размерностей в геометрии

Задача. *Дан равнобедренный треугольник ABC, AB = BC, $\angle B = 2\alpha$. Высота, опущенная на основание, равна h. В треугольник вписана окружность. Вторая окружность касается первой окружности и боковых сторон треугольника. Третья окружность касается второй окружности и боковых сторон треугольника и т.д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех получившихся кругов.*

Традиционное решение основано на рассмотрении окружностей, вписанных в подобные треугольники. Сумма площадей всех кругов получается как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поступим по-другому.

Из соображений размерностей площадь всех кругов можно выразить формулой $S_{(ABC)} = fh^2$, где f – некоторый неизвестный безразмерный коэффициент. Для его отыскания проведем отрезок MN, который касается первой окружности и параллелен основанию треугольника. Очевидно, что для кругов, вписанных в треугольник MBN, справедлива та же формула для суммы их площадей с заменой, разумеется, высоты h на высоту треугольника MBN: $S_{(MBN)} = f(h - 2r_1)^2$, где r_1 – радиус первого круга. Ясно, что площадь всех кругов, вписанных в треугольник ABC, равна сумме площадей первого круга и всех кругов, вписанных в треугольник MBN: $fh^2 = \pi r_1^2 + f(h - 2r_1)^2$.



Радиус первого круга равен $r_1 = \dfrac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Получим уравнение относительно неизвестной величины f; его решение $f = \dfrac{\pi\sin\alpha}{4}$. Следовательно, сумма площадей всех кругов, вписанных в треугольник ABC, равна $S = \dfrac{\pi}{4}h^2\sin\alpha$.

А.Колодочко