Что такое комбинаторика

А.ЛЕВИН

Что такое счастье

Вернемся к уравнению (6) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m)$. Уместно посмотреть, что произойдет, если игнорировать порядок слагаемых. Для определенности будем считать слагаемые положительными и рассмотрим следующую задачу.

Задача 13. *Сколькими способами можно разбить число m на n ($\le m$) натуральных слагаемых, если разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются тождественными?*

Решили? Нет? Это и неудивительно: задача не решается в привычном смысле. Хотелось бы, чтобы, как и ранее, ответ давался в виде явно выписываемой функции $f(m, n)$. Но на этот раз сколько-нибудь «явно» выразить ответ через параметры задачи m, n не удается.

Разумеется, для любых конкретных чисел m, n мы в принципе можем вычислить численное значение $f(m, n)$ – хотя бы перебором, на худой конец. Например, легко убедиться, что $f(8, 3) = 5$, ибо существует 5 способов разбиения (с точностью до порядка) числа 8 на 3 слагаемых:

$$1 + 1 + 6,\ 1 + 2 + 5,\ 2 + 2 + 4,$$
$$1 + 3 + 4,\ 2 + 3 + 3.$$

С помощью компьютера можно быстро вычислять и такие значения, как, например, $f(100, 10)$. Только перебором не стоит заниматься, существует куда более эффективный алгоритм. Полезно заметить, что отождествление разбиений, отличающихся порядком, можно заменить требованием упорядоченности x_i, скажем, в неубывающем порядке:

$$(1 \le) x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n. \qquad (8)$$

Таким образом, $f(m, n)$ есть число решений в натуральных числах системы, состоящий из уравнения (6) и неравенств (8). Такая переформулировка удобна во многих отношениях; она может помочь и при выборе эффективного алгоритма вычисления f. Разработка и программная реализация алгоритма – а заодно и вычисление $f(100, 10)$ – предоставляется читателю в качестве полезного и интересного самостоятельного задания. Заметим лишь, что алгоритм будет носить рекуррентный характер – от меньших значений параметров к бóльшим.

Относится ли данное задание к комбинаторике или к информатике? К тому и к другому. Можно назвать это компьютерной комбинаторикой. Жаль, что в русском языке пока нет слова «алгоритмика». Оно было бы кстати. (Впрочем, скорее всего, оно появится в недалеком будущем).

Разумеется, для вычислений с $n!$ при заданном n также можно написать программу (причем число операций будет расти вместе с n). Почему же мы относим выражения $n!$, $\binom{n}{m}$ и т.п. к «явным» аналитическим выражениям в отличие от $f(m, n)$? Обозначения здесь ни при чем: ведь при желании можно и для $f(m, n)$ придумать какое-нибудь специальное обозначение (скажем, $m?n$). Суть в том, что особая простота «факториального» алгоритма и в самом деле позволяет обращаться с факториалами как с аналитическими выражениями – подставлять в формулы и проводить преобразования. Об этом наглядно свидетельствует, например, приводимая ниже выкладка (15). С произвольными программами такое, разумеется, невозможно.

При первом знакомстве с комбинаторикой «нерешабельные» задачи обычно не затрагиваются. Мы нарушили эту традицию, чтобы читатель с самого начала имел правильное представление о предмете. Он должен почувствовать, что наличие «явного» ответа для комбинаторной задачи с параметрами (т.е. для задачи, в формулировку которой входят буквы) – это удача, счастливый случай, который надо ценить. Такие случаи осуществляются в комбинаторике довольно часто. Но, к сожалению, не всегда.

Знак Σ

Те, кто знаком с этим обозначением, могут данный пункт пропустить. Они ведь и так знают, что эта прописная греческая буква (сигма) является общепринятым символом суммирования. Обычно суммирование идет по одному или нескольким целочисленным индексам. Если индекс пробегает значения «от и до», то нижняя и верхняя границы указываются, соответственно, внизу и вверху; в более сложных случаях область изменения индексов обычно указывается под буквой Σ. Вот несколько примеров:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} a_k;\ 2)\ \sum_{k} a_k;\ 3)\ \sum_{k=1}^{n} a_k = m;$$

$$4)\ \sum_{j=0}^{\infty} aq^j = \frac{a}{1-q};\ 5)\ \sum_{1\le i<j\le 4} x_{i,j};$$

$$6)\ \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \ge 0 \\ n_1+n_2+n_3=2}} \frac{1}{n_1!\,n_2!\,n_3!}.$$

В случае 1) записана сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (здесь Σ легко заменить многоточием, но так дело обстоит не всегда). В 2) указан индекс суммирования k, но не его границы; они, следовательно, должны быть ясны из контекста. В 3) читатель узнает уже знакомое нам «уравнение дележа» (6), а в 4) – формулу для суммы членов геометрической прогрессии (при $|q| < 1$); здесь число слагаемых, очевидно, бесконечно. В 5) записано выражение

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34},$$

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.


К
ом
и
а
КОМ - БИ - ТОР - РОТ - РАКА - КАРА - БАРИТОН - НОГА - БИТА - БИНТ - БАНТ - БАНКА - КАНТ - КАНАТ - КАРА - РАКА - КРАБ - РАБ

а в 6) – величина

$$\frac{1}{2!0!0!}+\frac{1}{0!2!0!}+\frac{1}{0!0!2!}+\frac{1}{1!1!0!}+$$
$$+\frac{1}{1!0!1!}+\frac{1}{0!1!1!}(=4,5).$$

Как видим, в случаях 5) , 6) легко обойтись и без Σ. Но представьте себе, что в 6), например, 2 заменено на 200. Запись с Σ останется столь же короткой, а о «явной» записи (без Σ) даже думать не хочется.

При многоиндексном суммировании довольно часто встречаются «кратные» Σ (Σ под знаком Σ); мы их применять не будем.

Комбинаторика помогает алгебре

Все знают формулу

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2.$$

Эрудиты помнят также выражения для куба суммы двух слагаемых и для квадрата суммы произвольного числа слагаемых. Но даже из эрудитов мало кто подозревает, что все это – одна и та же формула, вернее, ее частные случаи. Вот она, эта формула:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=$$
$$=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\ge 0\\ k_1+\ldots+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}. \quad (9)$$

Некоторая сложность выражения является, так сказать, платой за универсальность – ведь формула верна для любых натуральных m и n. Суммирование в (9) ведется по всем целочисленным кортежам, удовлетворяющим указанным условиям.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что при n = 2 (9) переходит в обычную формулу для квадрата суммы. Такая проверка, конечно, не заменяет обоснования, которым мы теперь и займемся.

Тот факт, что правая часть (9) является суммой членов вида

$$cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}\,(k_1,\ldots,k_m\ge 0,$$
$$k_1+\ldots+k_m=n),$$

ясен. Все дело в том, чтобы найти коэффициент c (зависящий, конечно, от k_1, ..., k_m).

Чтобы не утомлять читателя суетой с индексами, затемняющей суть дела, мы, как и ранее, ограничимся частным случаем. Основная идея очевидным образом переносится на общий случай.

Примем для определенности $m=3$, n = 7 и найдем коэффициент при $x^2y^2z^3$ в выражении

$$(x+y+z)^7, \qquad (10)$$

или, точнее, в выражении, которое получится после возведения в степень и приведения подобных членов.

Забудем временно о показателях степени и запишем (10) в виде произведения 7 скобок

$$(x+y+z)(x+y+z)\ldots(x+y+z). \quad (11)$$

Выполняя почленное умножение без изменения порядка сомножителей, мы будем получать произведения, выглядящие как слова. Скажем, если в каждой скобке берется первое слагаемое, получим $xxxxxxx$. Нас, однако, сейчас интересуют произведения, куда x, y и z входят сомножителями 2, 2 и 3 раза соответственно. Например, произведение

$$yxxzzzy,$$

которое получается, если в первой скобке берется второе слагаемое, во второй и третьей – первое и т.д. Сколько будет слагаемых этого типа?

Знакомая ситуация, не правда ли? Помните, мы переставляли буквы слова КОЛОКОЛ и нашли, что таким образом можно получить $\frac{7!}{2!2!3!}$ = 210 различных слов (перестановки с повторениями)? Теперь у нас вместо К, Л, О буквы x, y, z. Разумеется, на ответ это не влияет. Итак, соответствующее слагаемое имеет вид

$$\frac{7!}{2!2!3!}x^2y^2z^3=210x^2y^2z^3.$$

Мы получили (для $m=3$, $n=7$) одно из слагаемых в правой части (9). Все остальные получаются точно так же.

Да, кстати, а сколько всего этих слагаемых? Конечно же, слагаемых ровно столько, сколько решений в целых числах $k_i\ge 0$ у нашего любимого уравнения k_1 + ... + k_m = n, т.е. $\binom{n+m-1}{m-1}$. В данном случае получится $\binom{9}{2}$ = 36 слагаемых.

Кому-то наши скоростные способы «возведения в степень без возведения в степень» могут показаться сомнительными. Что ж, скептики могут, например, честно перемножить скобки в (11), привести подобные и непосредственно проверить, сколько получится слагаемых и каков окажется коэффициент при $x^2y^2z^3$.

По-человечески жаль их, конечно. Все-таки седьмая степень. Почти наверняка где-то собьются, надо будет искать ошибку, исправлять... чтобы после всех трудов «причалить», наконец, к числам 36, 210, которые мы нашли, можно сказать, устно.

Любимая формула Коровьева (бином Ньютона)

«Подумаешь, бином Ньютона», – говаривал небезызвестный Коровьев, вице-премьер еще более небезызвестного Воланда. Что, собственно, он имел в виду?

Смысл ясен – это, мол, не проблема. Но все-таки: что за бином такой?

А это просто частный случай формулы (9) при m = 2:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k. \quad (12)$$

Кстати, бином в переводе значит двучлен (а речь здесь идет именно о степени двучлена). Теперь читателю ясно, почему числа сочетаний обычно называют биномиальными коэффициентами.

Для примера возьмем, скажем, n = = 4:

$$(x+y)^4=\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3y+$$
$$+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}xy^3+\binom{4}{4}y^4=$$
$$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4. \quad (13)$$

Разумеется, для столь малого $n(=4)$ тот же результат легко получить простым возведением в степень – например, возведя в квадрат $x^2+2xy+y^2$. Суть биномиальной формулы (12) именно в том, что она дает ответ непосредственно, без обращения к низшим степеням. То же относится и к более общей формуле (9) (ее иногда называют полиномиальной).

Следующая таблица известна как арифметический треугольник, или

Иллюстрация Ю.Ващенко

треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots \end{array}$$

Если считать верхнюю строку нулевой, то в n-й строке стоят (в естественном порядке) коэффициенты разложения $(x+y)^n$. Например, четвертую строку образуют коэффициенты в правой части (13). Ясно, что таблицу можно продолжать неограниченно.

Данное расположение биномиальных коэффициентов обладает очень симпатичным свойством: каждый элемент таблицы (кроме окаймляющих единиц) есть сумма двух, стоящих непосредственно над ним. Соответствующее равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (14)$$

можно доказать тремя простыми способами.

Во-первых, прямой выкладкой:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$$

$$= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \qquad (15)$$

Во-вторых, при помощи комбинаторных соображений: число k-подмножеств n-множества, т.е. $\binom{n}{k}$, есть число k-подмножеств, содержащих какой-либо фиксированный элемент, т.е. $\binom{n-1}{k-1}$, плюс число k-подмножеств, не содержащих того элемента, т.е. $\binom{n-1}{k}$.

Третий способ – приравнивание коэффициентов при $x^{n-k}y^k$ в тождестве

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y).$$

Конечно, для доказательства (14) вполне достаточно одного способа. Но для решения более сложных задач полезно уяснить связь между разными подходами.

До сих пор для вычисления $\binom{n}{k}$ у нас была формула (5), основанная на операциях умножения и деления. Треугольник Паскаля показывает, между прочим, что можно обойтись только операцией сложения (натуральных чисел). Требуемое число операций не слишком велико (кстати, найдите его), хотя и заметно больше, чем в формуле (5).

Помимо (14), имеется ряд других любопытных закономерностей. Скажем, сумма элементов n-й степени равна 2^n. Действительно, она равна $(x+y)^n$ при $x = y = 1$. Далее, в каждой строке (кроме нулевой) суммы элементов на четных и на нечетных местах совпадают. Для первой, третьей и т.д. строк это очевидно из соображений симметрии (одинаковые слагаемые в обеих суммах). Но, например, и для четвертой строки имеем $1 + 6 + 1 = 4 + 4$, хотя слагаемые различны. Почему бы это? Ключ к разгадке – та же биномиальная формула.

В общем, арифметический треугольник заслуживает того, чтобы изучить его вдоль и поперек. Да и наискосок тоже.

Ал-Каши и школьники

Комбинаторные понятия и, в частности, биномиальные коэффициенты встречаются в математике на каждом шагу. В связи с этим возникает пикантный вопрос об отношении к комбинаторике авторов наших школьных программ и учебников. Если, конечно, полное игнорирование можно считать отношением.

Важность комбинаторики была осознана давно. Бином Ньютона и треугольник Паскаля, вопреки названиям, были известны до Ньютона и Паскаля. Например, в начале XV века самаркандский математик и астроном ал-Каши написал общедоступный учебник элементарной математики «Ключ к арифметике». Наряду с десятичными дробями, извлечением корней и т.п. там приводились биномиальные коэффициенты и арифметический треугольник.

Для постановки образования на Руси усилия ал-Каши не могли иметь заметных последствий. Не до науки было – смуты, междоусобицы, монголы… Да и вдобавок объединитель Руси Иван III к тому времени еще и родиться-то не успел.

С тех пор прошло без малого шесть веков. А выпускники наших школ знают о комбинаторике примерно столько же, сколько во времена монгольского ига. Вот разве что само название бинома Ньютона знакомо теперь многим школьникам. Да и то благодаря роману «Мастер и Маргарита»!

Несколько слов об операциях над множествами

Вообще-то эта тема заслуживает более чем нескольких слов, но мы коснемся ее лишь по мере надобности. К тому же для большинства читателей, вероятно, тема эта не нова.

Простейшая операция над множеством A – образование его дополнения $\overline{A}$, т.е. множества, состоящего из всех элементов, не принадлежащих A (при этом предполагается наличие некоторого «объемлющего» множества B, для которого A и $\overline{A}$ – подмножества). Мы по существу уже пользовались понятием дополнения, когда переходили к множеству «ненужных» объектов. При этом применялось очевидное соотношение $|A| + |\overline{A}| = |B|$. Здесь и далее через $|C|$ обозначается количество элементов множества C (мы рассматриваем лишь конечные множества).

Объединением

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$$

множеств $A_1, \ldots, A_m$ называется множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A_1, \ldots, A_m$. Пересечением

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$$

или просто $A_1A_2\ldots A_m$

множеств $A_1, \ldots, A_m$ называется множество элементов, принадлежащих всем множествам $A_1, \ldots, A_m$.

Если, например, A_1 – множество четных цифр, т.е. $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, A_2 – множество цифр, кратных трем, т.е. $A_2 = \{0, 3, 6, 9\}$, то

$$A_1 \cup A_2 = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A_1A_2 = \{0, 6\},$$

$$|A_1 \cup A_2| = 7, \ |A_1A_2| = 2.$$

Далее используются некоторые очевидные свойства операций объединения и пересечения – например, независимость их от порядка A_1, … …, A_m, а также свойства типа

$$AA = A,$$

$$A(B\cup C\cup\ldots\cup D) = AB\cup AC\cup\ldots\cup AD.$$

(Принимается, что пересечение связывает сильнее, чем объединение, т.е., например, $AB\cup AC = (AB)\cup(AC)$.)

Теперь мы можем так записать принцип сложения: если множества A_1, … A_m попарно не пересекаются (т.е. $|A_iA_j| = 0$ при всех $i\neq j$, $1\leq i$, $j\leq m$), то

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|A_i\right|. \quad (16)$$

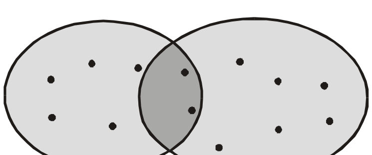
Конечно, этот факт очевиден, как его ни записывай. Но попарно пересекающиеся множества – это очень частный (и очень простой) случай. Можно ли получить аналог формулы (16) для общего случая? Да, и в нескольких формах. Нас будет особо интересовать одна из них (не использующая дополнений к A_1, … …, A_m).

Слабонервных просят не читать (формула включений и исключений)

Случай $m = 2$, впрочем, рекомендуется всем, даже слабонервным. Действительно, при $m = 2$ формула, о которой идет речь, имеет вполне симпатичный вид

$$\left|A_1\cup A_2\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| - \left|A_1 - A_2\right|. \quad (17)$$

Ее и доказывать-то не надо, достаточно взглянуть на рисунок:



A_1 A_2

$|A_1\cup A_2|$ – количество точек (элементов) во всей заштрихованной области. Складывая $|A_1|$ и $|A_2|$, мы дважды засчитываем точки из области с двойной штриховкой, т.е. из A_1A_2. Поэтому вычитание $|A_1A_2|$ все ставит на свои места.

Итак, элементы A_1A_2 сначала «включаются» в сумму избыточным образом, затем это исправляется соответствующим «исключением». Отсюда и название формулы. В общем случае она выглядит довольно устрашающе, и мы прелагаем ее лишь для читателей не робкого десятка:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\right| = \sum_i\left|A_i\right| - \sum_{i<j}\left|A_iA_j\right| + \sum_{i<j<k}\left|A_iA_jA_k\right| - \ldots + (-1)^{m+1}\left|A_1A_2\ldots A_m\right| \quad (18)$$

(все индексы суммирования меняются между 1 и m).

При $m = 2$ получается, конечно, (17), где в правой части всего 3 слагаемых. Сколько же вообще слагаемых (того или иного знака) в «сумме сумм», стоящей в правой части? Столько же, сколько непустых подмножеств у m-множества, т.е. $2^m - 1$. Если, скажем, $m = 30$, то слагаемых уже больше миллиарда. А ведь чтобы найти каждое слагаемое, надо определить число элементов, общих для какого-то набора из множеств A_1, …, A_m. Неужели столь громоздкая уродливая формула может быть полезной?

Вопрос, понятно, риторический. Для чего же еще мы стали бы ее приводить – ради красоты, что ли?

В задачниках часто можно найти примеры применения формулы (18) наподобие следующего.

Задача 14. *Ученики некоторого класса занимаются только тремя видами спорта – бегом, плаванием и теннисом. Бегом всего занимается 10 человек, плаванием – 13, теннисом – 11, бегом и плаванием – 4, бегом и теннисом – 5, плаванием и теннисом – 6, бегом, плаванием и теннисом – 2. Сколько учеников данного класса занимается спортом?*

Для решения применим формулу (18). Если множество учеников, занимающихся бегом, обозначить через A_1, плаванием – через A_2 и теннисом – через A_3, то искомая величина есть

$$\left|A_1\cup A_2\cup A_3\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| - \left|A_1A_2\right| - \left|A_1A_3\right| - \left|A_2A_3\right| + \left|A_1A_2A_3\right| = 10 + 13 + 11 - 4 - 5 - 6 + 2 = 21.$$

Все правильно, но в полезности формулы (18) подобные примеры не очень убеждают. Как-то трудно поверить, что лица, обладающие столь детальной информацией о занятости учеников всевозможными комбинациями видов спорта, почему-то не знают, сколько же учеников занимается спортом, и обращаются за помощью к нам – т.е. к формуле включений и исключений. Намного более интересное приложение будет рассмотрено в следующем разделе.

Мы увлеклись обсуждением формулы (18) и едва не забыли про доказательство. С применением индукции оно оказывается довольно простым. Пусть формула уже доказана для $m' = 2$ и $m' = m - 1$. Полагая $A_1\cup\ldots\cup A_{m-1} = B$, находим

$$\left|A_1\cup\ldots\cup A_m\right| = \left|B\cup A_m\right| = \left|B\right| + \left|A_m\right| - \left|BA_m\right| = \left|B\right| + \left|A_m\right| - A_1A_m\cup\ldots\cup A_{m-1}A_m = \sum_{i<m}\left|A_i\right| + \left|A_m\right| - \sum_{i<j<m}\left|A_iA_j\right| - \sum_{i<m}\left|A_iA_m\right| + \ldots = \ldots\sum_i\left|A_i\right| - \sum_{i<j}\left|A_iA_j\right| + \ldots$$

Полезная все-таки вещь – индукция!

Число перестановок, имеющих неподвижные элементы

Рассмотрим $3! = 6$ возможных перестановок чисел 1, 2, 3:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

В первой из них все три числа стоят на своих местах («неподвижны»). Во второй есть один такой элемент (1); также по одному неподвижному элементу имеют третья (3) и шестая (2). В четвертой и пятой перестановках неподвижных элементов нет.

Рассмотрим вопрос: сколько из $m!$ перестановок чисел 1, 2, …, m имеют неподвижные элементы?

Для $m = 3$ ответ, как мы видели, 4 (для $m = 2$ такая перестановка, очевидно, одна). Вручную нетрудно решить задачу перебором для случая $m = 4$; при $m = 5$ возникает мысль о применении компьютера. В самом деле, даже при m порядка 10 – 12 (когда перебор вручную нереален) компьютерный перебор не занимает много времени. Но уже при $m = 20$ перебор 20! перестановок недоступен для компьютеров. Надо, стало быть, искать какие-то более действенные средства подсчета. Другими словами, обратиться к комбинаторике.

Перестановка с неподвижными элементами – это перестановка, имеющая хотя бы один неподвижный элемент. Некоторые читатели, вероятно, помнят, что, когда возникает выражение «хотя бы один», часто удобно переходить к дополнительному множеству, где таких элементов нет ни одного. Тем более, что и принцип умножения сам в руки просится.

Итак, подсчитываем с помощью этого принципа число «ненужных» (т.е. не имеющих неподвижных элементов) перестановок. На первой позиции кортежа может стоять любое число, за исключением 1, т.е. $n_1 = m - 1$. Далее, на второй позиции может стоять любое число, кроме 2 и числа, стоящего на первой позиции; стало быть, $n_2 = m - 2$. Продолжая это рассуждение, доходим до $n_{m-1} = 1$ и, наконец, до $n_m = 0$. Мы пришли к неожиданному результату – оказывается, перестановок без неподвижных элементов не существует! А то, что примеры таких перестановок у нас перед глазами – это, повидимому, не более чем мираж...

В чем дело, читатель? Ваша версия? Если таковой нет, подумайте.

Конечно, дело в применении (вернее, в «применении») принципа умножения. Вернемся к нашим рассуждениям. Первый шаг безупречен: $n_1 = m - 1$. Но вот второй... Мы молчаливо предположили, что число, стоящее на первой позиции, и 2 – это два различных числа. Но ведь перестановка может начинаться с 2, тогда для второй позиции имеется не $m - 2$, а $m - 1$ возможностей. Итак, оказывается, наше множество не имеет простой структуры (когда число возможностей не зависит от того, что стоит на предшествующих позициях). Для применимости принципа умножения этот факт является роковым.

Раз не удалось взять крепость кавалерийским наскоком, придется пустить в ход тяжелую артиллерию – формулу включений и исключений.

Пусть A_k – множество перестановок с неподвижным элементом k $(1 \le k \le m)$. Требуется найти величину $N_m = \left|A_1 \cup \ldots \cup A_m\right|$ (мы вернулись к «нужным» перестановкам). Заметим, что для любых k $(1 \le k \le m)$ различных индексов i_1, i_2, ..., i_k

$$\left|A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right| = (m-k)!.$$

В самом деле, пересечение $A_{i_1} A_{i_k}$ – это множество перестановок, в которых числа i_1, ..., i_k закреплены на своих местах, а остальные $m - k$ чисел из 1, 2, ..., m могут быть расположены в произвольном порядке на $m - k$ свободных местах (попадут ли какие-либо из них на свои места, не имеет отношения к делу). Итак, искомое число есть количество перестановок из $m - k$, т.е. $(m - k)!$.

Теперь формула (18) резко упрощается. Поскольку число слагаемых в сумме, где участвуют пересечения вида $A_{i_1} \ldots A_{i_k}$, равно

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

и каждое слагаемое в этой сумме равно $(m - k)!$, получаем

$$N_m = \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right| = \\ = \frac{m!}{1!} - \frac{m!}{2!} + \frac{m!}{3!} - \ldots + (-1)^{m+1}.$$

Например, при $m = 6$ число перестановок с неподвижными элементами есть

$$N_6 = 720 - 360 + 120 - \\ - 30 + 6 - 1 = 455.$$

Еще интереснее вопрос о том, как ведет себя доля таких перестановок (среди всех $m!$ перестановок)

$$\frac{N_m}{m!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}. \qquad (19)$$

С ростом m эта доля приближается к бесконечной сумме

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \qquad (20)$$

«Бесконечность» здесь относится лишь к числу слагаемых, но не к самой величине суммы, которая имеет вполне определенное и конечное значение, являющееся пределом сумм (19) при $m \to \infty$. Ситуация здесь вполне аналогична суммированию убывающей геометрической прогрессии. Математики в таких случаях говорят, что *ряд* (20) *сходится*. С помощью разных методов удалось, помимо суммы членов убывающей геометрической прогрессии, найти суммы огромного числа других сходящихся рядов. Доказано, в частности, что сумма ряда (20) есть

$$1 - \frac{1}{e} = 0{,}6321\ldots,$$

где $e(= 2{,}718\ldots)$ – основание натуральных логарифмов.

Итак, с ростом m доля перестановок с неподвижными элементами стремится не к 0 или 1 (как можно было бы предположить), а к довольно загадочной величине $1 - e^{-1}$.

После этого красивого результата стоит, пожалуй, пересмотреть наш взгляд на формулу (18). Да, конечно, простые, короткие формулы приятнее для глаза. Но ведь бывает и так – и мы только что это видели, – что громоздкая с виду формула дает кратчайший путь к решению. А простые формулы либо вообще не годятся, либо приводят к длинным, громоздким способам решения задачи.

Так что, может быть, формула (18) вовсе не так уж уродлива? И даже совсем наоборот?

Наука велика, а жизнь коротка

Мы обсудили некоторые простейшие задачи комбинаторики. Можно назвать это введением в комбинаторику, дающим первое представление о предмете. Очень многое, конечно, пришлось оставить за бортом.

Не коснулись мы, например, так называемого метода производящих функций, где уже не комбинаторика помогает алгебре, а, наоборот, алгебра и анализ помогают комбинаторике (впрочем, разобраться, кто кому «помогает», не всегда просто, лучше говорить о взаимодействии различных областей математики). Хотелось бы поговорить о приложениях комбинаторики в теории вероятностей, затронуть интереснейшие приложения в физике (периодическая таблица Менделеева, второе начало термодинамики), обсудить роль комбинаторики в планировании эксперимента, в кодировании, рассмотреть комбинаторную природу генетического кода... Увы, нельзя объять необъятное, как отметил знаменитый Козьма Прутков. И еще до него древние высказывались в том смысле, что, дескать, ars longa, vita brevis. Поскольку «латынь из моды вышла ныне», даем вольный перевод: наука велика, а жизнь коротка.