ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. При сложении из разряда единиц в разряд десятков была перенесена единица (иначе разряд десятков не изменился бы). Но заметим, что разряд сотен также изменился, т.е. туда из разряда десятков была перенесена единица. Но в разряде десятков производилось сложение Е и 1, т.е. Е + + 1 оказалось не меньше 10, откуда следует, что Е = 9, и Е + 1 = 10, поэтому У = 0. Ребус приобрел вид: Б999 + Б =

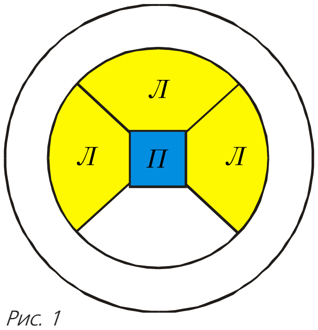

Рис. 1

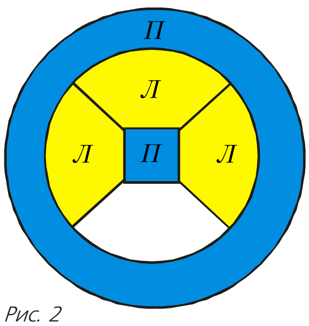

Рис. 2

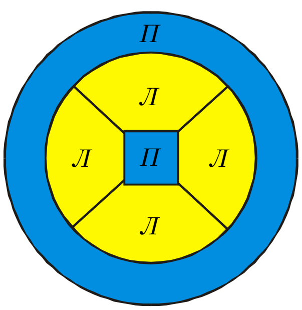

Рис. 3

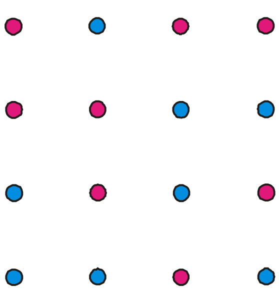
Рис. 4

= М000. Анализируя разряд единиц, получаем, что (9 + + Б) должно оканчиваться нулем, поэтому Б = 1, и тогда М = 2. В расшифрованном виде ребус выглядит так:

1999 + 1 = 2000.

2. *Ответ*: можно. Раскрасим клетки квадрата в шахматном порядке в белый и черный цвета. Искомую расстановку чисел получим, если в белые клетки поставим все числа от 1 до 8, а в черные – все числа от 9 до 16.

3. Поскольку 11111112222222 = $= 1111111 \cdot (10^7 + 2) =$

$= 3333333 \cdot \left(\dfrac{9999999 + 3}{3}\right) =$

$= 3333333 \cdot (3333333 + 1)$, то исходное выражение равно числу 3333333^2, т.е. является квадратом.

4. На планете обязательно должен обитать правдолюб (иначе каждый из лжецов будет говорить правду, что невозможно). Нарисуем карту планеты, для удобства изменив форму и размеры граней, как показано на рисунке 1. В центре карты изображена грань, которой владеет правдолюб (П). По условию, она соседствует с тремя гранями, которыми владеют лжецы (Л). Рассмотрим лжеца, соседствующего с двумя другими лжецами (на рисунке 1 территория этого лжеца показана сверху территории правдолюба). Его утверждение будет ложным только в том случае, если он будет соседствовать с двумя правдолюбами – см. рисунок 2. Но в этом случае на последней незанятой грани может находиться только лжец (рис.3).

Ответ: на планете Куб обитают 2 правдолюба и 4 лжеца.

5. Один из возможных вариантов решения показан на рисунке 4.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Если меньшая палочка укладывается в большей не менее 2 раз, то ее длина заведомо меньше $\frac{2}{3}$ длины большей палочки. Пусть меньшая палочка, дважды приложенная к большей, выступает на длину d (рис.5). Длина меньшей палочки меньше $\frac{2}{3}$ длины большей палочки, если отрезок длины d более 3 раз откладывается на большей палочке.

2. Красные точки разбивают периметр правильного 110-угольника на 5 равных частей. Одна из этих частей содержит 3 синие точки (в противном случае синих точек оказалось бы $5 \times 2 = 10$, что меньше 11 – заданного в условии задачи их количества). 3 синие точки вместе с другими расположенными между ними вершинами 110-угольника образуют в совокупности 21 вершину – а это как раз число вершин, расположенных между двумя соседними красными точками. Следовательно, красная точка обязательно соседствует с одной из синих, т.е. у 110-угольника есть сторона, концы которой окрашены в красный и синий цвета.

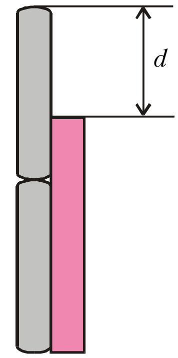

Рис. 5

3. Среди натуральных чисел квадраты встречаются вообще-то чаще, чем кубы, поэтому на первый взгляд кажется, что больше листов вырвет Миша. Но на самом деле больший ущерб нанесет учебнику Гриша, потому что Мише не удастся вырвать *ни одного* листа! Причина этого в следующем. Нумерация страниц в учебниках (и других книгах тоже) такова, что номера страниц на обеих сторонах листа различаются на 1, причем меньший из номеров всегда *нечетный*. Пусть он равен $2n + 1$ (где n – целое неотрицательное), тогда номер страницы на другой стороне листа равен $2n + 2$, и сумма номеров страниц на обеих сторонах листа составляет $(2n + 1) + (2n + 2) = 4n + 3$. При делении на 4 это число дает, как видно, остаток 3. В самом деле, если число – четное, т.е. делится на 2, то его квадрат делится на 4, и остатка нет совсем. Если же число – нечетное, то его можно записать в виде $2m + 1$ (m – целое), и квадрат равен $(2m+1)^2 =$ $= 4m^2 + 4m + 1 =$ $= 4(m^2 + m) + 1$, что при делении на 4 дает в остатке 1. Таким образом, в учебнике просто нет ни одного листа, удовлетворяющего Мишиным требованиям. В то же время листы, подходящие для Гриши, имеются, например – 27 = 13 + 14. Так что окончательный ответ: Гриша.

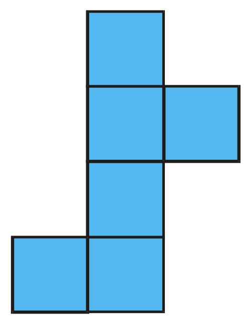
Рис. 6

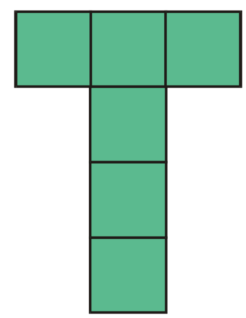
Рис. 7

4. Существует (см. рис.6, 7).

5. См. рис.8.

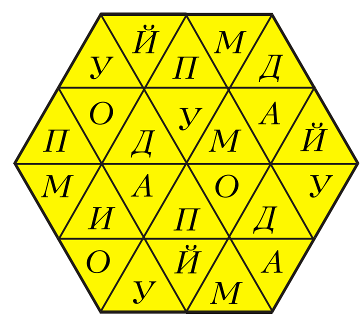

Рис. 8

Странные игроки

3. Странный игрок набирает очки только во встречах с теми, кто получил не меньше. Поэтому он обладает следующим свойством:

(∗) *Количество очков, полученное странным игроком, меньше числа игроков, набравших столько же или больше (включая его самого).*

Пусть игрок А набрал больше, чем странный (который по определению выиграл у всех, кто набрал больше его). Тогда сумма очков игрока А заведомо больше, чем число игроков, имеющих столько или больше, чем он. Как следствие, А не обладает свойством $(*)$.

Ответ на поставленный вопрос теперь ясен: количество очков странного участника – это наибольшее количество очков, которое меньше числа игроков, набравших столько или больше. Отметим, что мы заново решили задачу 1, поскольку не пользовались тем, что все странные имеют одинаковую сумму очков.

Попутно возникает **задача 3'.** *В каждом ли круговом турнире найдется участник со свойством $(*)$? А не имеющий этого свойства? Может ли в турнире быть участник с количеством очков, равным числу игроков, которые набрали столько или больше?*

Решение. Те, кто занял последнее место, заведомо обладают свойством $(*)$: наравне с ними или выше находятся все N участников турнира, тогда как сумма очков любого игрока не больше $N-1$.

Напротив, игроки без свойства $(*)$ могут отсутствовать. Так будет, если число участников турнира $N > 2$, один из них проиграл всем остальным, а они сыграли между собой вничью. (См. также задачу 2 а).)

Пусть теперь один из игроков выиграл у всех остальных, другой – у всех, кроме первого, и т.д. Если число участников N четно, то имеется игрок с $N/2$ очками. Наравне с ним и выше находятся также $N/2$ участников. Таким образом, случай равенства рассматриваемых величин возможен. (Однако, ввиду показанного в решении задачи 3, он несовместим с наличием странных игроков.)

4. а) Согласно задаче 1 все странные игроки делят одно и то же место в турнирной таблице. Пусть это место не является первым. Тогда участник, находящийся на первом месте, проиграл всем странным. Но он выступил лучше, чем «среднестатистический» игрок, и потому проиграл меньше матчей, чем выиграл. Значит, число проигранных им матчей меньше $N/2-1$ и (как целое) не больше $[N/2]-1$, что и требуется. Если же странные участники делят первое место, то аналогичное рассуждение можно применить к последнему месту.

Можно и не опираться на задачу 1. Действительно, положим $M=[N/2]-1$. Пусть число странных больше M. Участник, занявший (или разделивший) первое место, проиграл не более M матчей. При этом он проиграл всем странным, не разделившим первое место. Значит, кто-то из странных получил первое место. Он, в свою очередь, проиграл не более M матчей, но при этом проиграл всем участникам, не разделившим первое место. Следовательно, большинство игроков делит первое место. Но аналогично и на последнем месте находится большинство, что противоречит предыдущему.

б) Пусть $M=[N/2]$, $1 \le L \le M-1$, игроки занумерованы от 1 до N и разделены на четыре группы. В первую группу включим участников с номерами от 1 до L, во вторую – от $L+1$ до M, в третью – от $M+1$ до $N-L$ и в четвертую – остальных. Пусть при этом игроки первой группы проиграли все матчи со второй группой и выиграли матчи с третьей и четвертой. Четвертая группа выиграла у второй и проиграла первой и третьей. Все остальные встречи закончились вничью. Нетрудно подсчитать, что игроки первой группы набрали по $N-M+(L-1)/2$ очков, т.е. не меньше $N/2$. Игроки четвертой группы получили по $M-(L+1)/2$ очков – не больше $N/2-1$. Во второй и третьей группах результат равен $(N-1)/2$. Отсюда следует, что вторую группу составляют странные, первую – сильные, третью – средние, а четвертую –слабые. При этом число странных равно $[N/2]-L$, и за счет выбора L его можно сделать любым натуральным числом в пределах от 1 до $[N/2]-1$.

5. а) Рассмотрим «среднеарифметического» сильного игрока (т.е. сложим очки, набранные сильными, и разделим на число таких участников). Этот условный игрок выиграл у стольких же сильных, скольким и проиграл. При этом он проиграл всем странным. Поэтому сумма очков «среднеарифметического» сильного игрока не больше, чем число средних и слабых плюс половина числа сильных. Аналогично, результат «среднеарифметического» странного игрока не меньше, чем число сильных плюс половина числа странных. Но эта сумма меньше, чем в первом случае. Как следствие, общее число средних и слабых больше, чем половина общего числа сильных и странных. А это и означает, что сильные и странные составляют менее двух третей от всего состава игроков. Утверждение о численности странных вместе со слабыми доказывается аналогично.

б) Построение примера по существу содержится в решении п. а). Разделим участников турнира на три группы, причем в первых двух по $[N/3]+1$ человек. Пусть игроки первой группы выиграли все матчи у игроков второй группы. Аналогично, вторая группа выиграла у третьей, а третья – у первой. Внутри каждой группы все матчи закончились вничью. Нетрудно убедиться, что третья группа состоит из странных, первая из сильных и вторая из слабых.

Как и в задаче 4б), здесь можно построить пример, когда количество странных равно произвольно заданному числу, которое не превосходит максимально возможного. Предоставляем вам сделать это самостоятельно.

6'. Если на турнире не было ничьих, то число очков каждого участника – целочисленное, в промежутке от 0 до $N-1$. Если все они различны, то это – все целые числа от 0 до $N-1$. Очевидно, игрок с $N-1$ очками выиграл у всех остальных. Тогда игрок с $N-2$ очками выиграл у всех, кроме первого, и т.д.

7. а) Пусть число игроков нечетно, они занумерованы от 1 до $2M+1$ и меньшие номера выиграли у больших со следующими исключениями. Вничью сыграли первый с M-м и $(M+2)$-й с последним. Игрок с номером $M+1$ выиграл у всех предыдущих и проиграл всем последующим. Нетрудно убедиться, что сумма очков убывает с ростом номера и $(M+1)$-й игрок – странный.

б) Нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть в круговом турнире все N участников набрали различное число очков и сделали ровно одну ничью. Тогда: 1) разность соседних результатов не может быть больше 2; 2) если разность соседних результатов равна 2, то игроки не участвовали в ничьей.*

Доказательство леммы. Пусть лемма неверна. Выберем турнир с наименьшим числом участников, в котором она нарушается. Очевидно, $N > 2$. Для краткости вместо «разность соседних результатов» будем говорить просто «разность».

Пусть S – сумма всех разностей, D – разность, нарушающая 1) и 2). Число полуцелых разностей среди остальных игроков обозначим K. Каждая полуцелая разность не меньше $1/2$, а целая – не меньше 1. Поэтому

$$S \ge D + N - 2 - K/2. \qquad (**)$$

Результаты участников ничьей – полуцелые, а остальных – целые. Поэтому в каждой полуцелой разности обязательно «участвует» один из тех, кто сделал ничью, и число таких разностей не больше 4.

Пусть нарушено 1), т.е. $D > 2$. Если $D \ge 3$, то ввиду $(**)$ $S \ge N-1$ (поскольку $K \le 4$). Если же $D = 5/2$, то $K \le 3$ (так как D полуцелое), и опять $S \ge N-1$. Пусть теперь нарушено 2), т.е. $D = 2$ и один из «участников» этой разности участвовал в ничьей. Его результат – полуцелый, поэтому второй «участник» разности D тоже имеет полуцелый результат и участвовал в ничьей. Отсюда $K \le 2$, и ввиду $(**)$ снова $S \ge N-1$.

Итак, во всех случаях разность между наилучшим и наихудшим результатами не меньше $N-1$. Но больше она и не бывает, а равенство означает, что один из участников у всех выиграл, а другой – всем проиграл. В разности D не участвует хотя бы один из «крайних» игроков. Удалим его из турнирной таблицы. Утверждение леммы по-прежнему нарушается. Но число участников уменьшилось, что и дает противоречие. Лемма доказана.

Предположим, что все участники турнира набрали разное количество очков, имеется ровно одна ничья и при этом есть странный игрок А. Согласно задаче 2 б) он не может занять первое или последнее место. Игроки Б и В, находящиеся на соседних местах, отличаются от А по сумме очков не меньше чем на $1/2$. Поэтому между собой они различаются не меньше чем на 1.

Удалим А из турнирной таблицы. Результаты слабых (которые выигрывали у А) уменьшатся на 1, а результаты сильных останутся без изменения. Поэтому у всех игроков снова будет разное число очков. Ничья сохранится, поскольку А (как странный) в ней не участвовал. Результаты Б и В теперь соседние, и их разность не меньше 2. Но в силу леммы это означает, что она равна 2, причем Б и В не участвуют в ничьей.

Как следствие, в исходной таблице результаты Б и В различаются на 1. Значит, оба они отличаются на $1/2$ от результата А. Но А, Б и В не участвуют в ничьей, поэтому их результаты – целочисленные. Получено искомое противоречие.

Геометрическая оптика

1. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{h}{(n-1)F} = \operatorname{arctg} 0{,}1$.

2. $l = \dfrac{1}{2D}\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0{,}9$ см.

3. $l = 5F = 50$ см; $v = 10\omega F = 5$ см/с; $\beta = \pi/2 - 2\alpha = 10°$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(3; -2)$. *Указание.* Сложите уравнения системы.

2. $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)-\sin 3x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)} = 1.$$

3. $-\sqrt{15} < x < \dfrac{1-\sqrt{73}}{2}$, $5 < x < 6$.

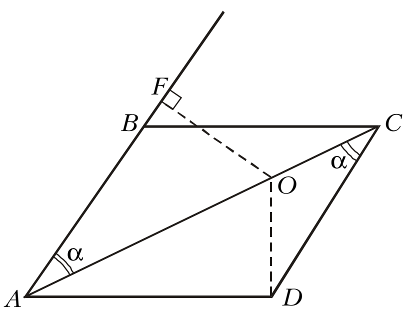

Рис. 9

4. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. *Решение.* Пусть O – центр окружности, R – ее радиус; F – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB; $\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ (рис.9). Тогда

$$OF = OC = OD = R,$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если $AB = CD = x$, S – площадь параллелограмма $ABCD$, то

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot AC\sin\alpha = \sqrt{2},$$

где

$$x = 2\cdot OC\cos\alpha = 2R\cos\alpha,$$

$$AC = AO + OC = \frac{R}{\sin\alpha} + R = 4R.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2} = 2R\cos\alpha\cdot 4R\sin\alpha = \frac{16\sqrt{2}}{9}R^2,$$

откуда

$$R = \frac{3}{4},\ x = \sqrt{2}.$$

Из ΔACD по теореме косинусов

$$AD^2 = 9 + 2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 3,$$

откуда

$$BC = AD = \sqrt{3}.$$

5. $x = 20$, $y = 8$. *Решение.* Умножая первое неравенство на 3 и складывая с третьим, получаем $7y < 61$, откуда $y < 8\frac{5}{7}$. Умножая второе неравенство на -3 и складывая с третьим, получаем $-5y < -32$, откуда $y > 6\frac{2}{5}$. Итак, $y = 7$ или $y = 8$. Подстановка этих значений в исходную систему показывает, что целочисленное решение только одно: – $y = 8$, $x = 20$.

6. $\arccos\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$, $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$, $a\sqrt{\dfrac{11}{6}}$.

Решение. а) Пусть M – середина AC, $\angle DCF = \alpha$, φ – угол между прямыми BC и KE (рис.10). Тогда

$$\angle EKM = \varphi,\ \cos\alpha = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из треугольников KEM, CEM и KEC по теореме косинусов

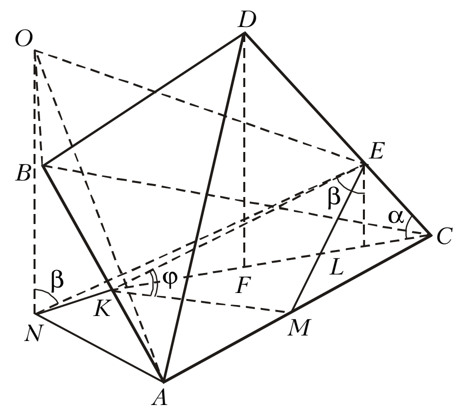

Рис. 10

получаем

$$EM^2 = KE^2 + KM^2 - 2KE\cdot KM\cdot\cos\varphi,$$

$$EM^2 = EC^2 + MC^2 - 2EC\cdot MC\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{36}a^2,$$

$$KE^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{3a^2}{4} - 2\frac{a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{19a^2}{36},$$

откуда следует, что

$$\frac{7a^2}{36} = \frac{19a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi,\ \cos\varphi = \frac{7}{2\sqrt{19}},$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

б) Расстояние ρ между прямыми BC и KE равно расстоянию от точки C до плоскости KEM, так как прямая BC параллельна этой плоскости. Вычислим двумя способами объем v пирамиды $KEMC$:

$$v = \frac{1}{3}\rho S_1 = \frac{1}{3}hS_2,$$

где S_1 и S_2 – площади треугольников KEM и KMC соответственно,

$$h = EL\left(L \in KC,\ EL \| DF\right),\ h = \frac{1}{3}DF = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

Так как

$$S_1 = \frac{1}{2}KE\cdot KM\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

то

$$\rho = h = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

в) Пусть O – центр сферы, проходящей через точки A, B, E и F. Точка O лежит на перпендикуляре к плоскости ABF, проведенном через центр N окружности, описанной около треугольника ABF (см. рис.10). Если R – радиус этой окружности, а x – радиус сферы, то

$$OB = OE = x,\ R = NF = \frac{AB}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = NA.$$

Пусть $ON = y$, $\angle ONE = \angle NEL = \beta$. Тогда из треугольника ONA по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = y^2 + \frac{a^2}{3}, \qquad (1)$$

а из треугольника ONE по теореме косинусов находим

$$x^2 = y^2 + NE^2 - 2y\cdot NE\cos\beta,$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{NL}{EL},\ NL = NF + FL = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{5a}{3\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ NE = \frac{EL}{\cos\beta} = a.$$

Следовательно,

$$x^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = a\sqrt{\frac{11}{6}}$.

Вариант 2

1. $\left(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Потенцируя, получаем систему

$$\begin{cases} 5y - x - 2 = 3(y - x), \\ y - 2 - 4xy = 3y|x|, \\ y > x,\ x \ne 0, \\ y(y - 2 - 4xy) > 0, \end{cases}$$

равносильную данной. Рассмотрите 2 случая: $x > 0$ и $x < 0$.

2. $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi k$, $x = \frac{11}{9}\pi + 2\pi k$, $x = \frac{4}{9}\pi + 2\pi k$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Указание. Уравнение равносильно совокупности из двух систем:

$$\begin{cases} \cos 2x \ge 0, \\ \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases}$$

3. $0 \le x \le \frac{8}{3}$, $x = \frac{10}{3}$, $4 < x \le 5$.

Решение. Область определения неравенства задается условиями

$$3x^3 - 22x^2 + 40x = 3x\left(x - \frac{10}{3}\right)(x - 4) \ge 0,\ x \ne 4,$$

откуда

$$0 \le x \le \frac{10}{3},\ x > 4.$$

Обозначим

$$f(x) = 3\left(x - \frac{10}{3}\right)(x - 4).$$

а) Пусть $x > 4$, тогда $f(x) > 0$. В этом случае исходное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\sqrt{xf(x)} \ge f(x),\ x \ge f(x),\ 3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x - 5) \le 0,$$

откуда, учитывая условие $x > 4$, получаем $4 < x \le 5$.

б) Пусть $0 \le x \le \frac{10}{3}$, тогда $x - 4 < 0$, $f(x) \ge 0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{xf(x)} \le f(x)$. Значение $x = \frac{10}{3}$ является решением этого неравенства, а если $0 \le x < \frac{10}{3}$, то $f(x) > 0$ и неравенство примет вид

$$3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x - 5) \ge 0,$$

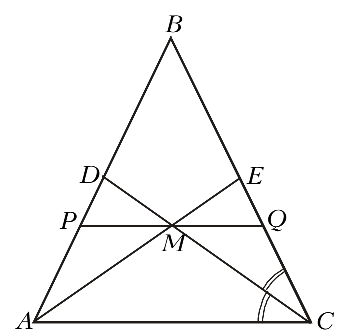

Рис. 11

откуда, с учетом условия $0 \le x \le \frac{10}{3}$, получаем $0 \le x \le \frac{8}{3}$.

4. $\frac{12}{7}$, $\frac{45\sqrt{2}}{28}$.

Решение. Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB = BC = \frac{2}{\cos\alpha} = 6$ (рис.11).

а) По свойству биссектрисы в треугольнике ACE имеем

$$\frac{ME}{MA} = \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4},$$

откуда

$$\frac{ME}{AE} = \frac{3}{7}.$$

Из подобия треугольников MEQ и AEC следует, что

$$\frac{MQ}{AC} = \frac{ME}{AE} = \frac{3}{7},\ \text{откуда}\ MQ = \frac{12}{7}.$$

б) Радиус R окружности, описанной около треугольника BPQ, равен

$$R = \frac{BQ}{2\sin\alpha} = \frac{3}{2\sqrt{2}BQ},$$

где

$$BQ = BE + EQ = 3 + EQ,\ EQ = \frac{3}{7}EC = \frac{9}{7},$$

откуда

$$BQ = \frac{30}{7},\ R = \frac{45\sqrt{2}}{28}.$$

5. а) 8; б) $10-\pi$; в) $6-\pi$.

Указание. а) Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие в квадрате (рис.12) с вершинами $A(-2;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$, $D(0;-2)$. Площадь этого квадрата равна 8.

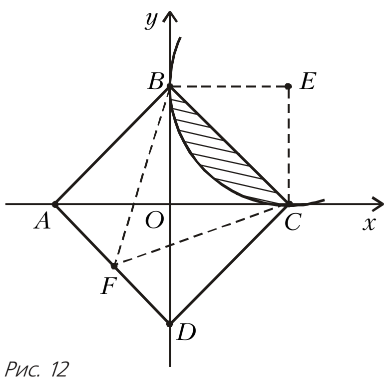

Рис. 12

б) Второму неравенству, которое можно записать в виде $(x-2)^2+(y-2)^2 \ge 4$, удовлетворяют точки квадрата, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке $E(2;2)$.

в) Прямые $y-3x-2=0$ и $3y-x+2=0$ пересекаются в точке $F(-1;1)$ и проходят соответственно через точки B и C. Третьему неравенству удовлетворяют точки двух вертикальных углов с вершиной F, один из этих углов – угол, образуемый лучами FB и FC и содержащий точку O, а системе из трех неравенств – точки «криволинейного треугольника» FBC.

6. а) $\frac{77}{36}$; б) $\frac{40\sqrt{2}}{33}$; в) $\arccos\frac{7}{11}$.

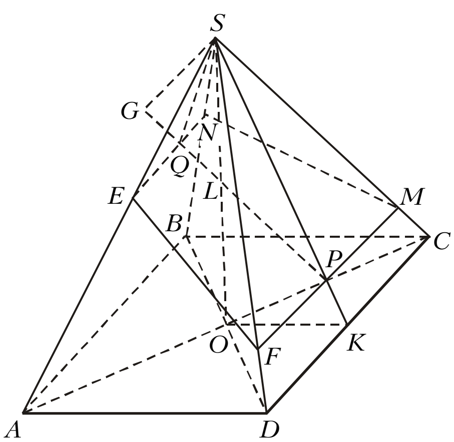

Рис. 13

Решение. При пересечении пирамиды плоскостью α получается равнобедренная трапеция $ENMF$ (рис.13), где

$$EN \| FM \| CD.$$

а) Пусть P и Q – середины сторон FM и EN, σ – площадь сечения. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}(EN+FM)PQ,$$

где

$$EN = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3},\ FM = \frac{5}{6}CD = \frac{5}{3}.$$

Если O – центр основания $ABCD$, L – точка пересечения SO и PQ, $\varphi = \angle QSL = \angle PSL$, K – середина CD, то

$$SK = \sqrt{SO^2+OK^2} = 3,\ SP = \frac{5}{6}SK = \frac{5}{2},\ SQ = \frac{1}{3}SK = 1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \sin\varphi = \frac{1}{3},\ \cos 2\varphi = \frac{7}{9},$$

$$\sin 2\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Из ΔSPQ по теореме косинусов находим

$$PQ = \frac{11}{6},\ \sigma = \frac{77}{36}.$$

б) Искомый радиус r сферы равен расстоянию от точки A до плоскости α, а $r = 2x$, где x – расстояние от точки S до плоскости α. Но x – высота SG в треугольнике SPQ, проведенная из вершины S. Пусть σ_1 – площадь треугольника SPQ, тогда

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}SQ\cdot SP\sin 2\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{9},\ x = \frac{2\sigma_1}{PQ} = \frac{20\sqrt{2}}{33},\ r = 2x = \frac{40\sqrt{2}}{33}.$$

в) Угол ω между плоскостью α и плоскостью $ABCD$ равен углу между SG и SL, так как $SG \perp \alpha$, $SL \perp ABCD$; $\cos\omega = \frac{x}{SL}$. Для вычисления SL воспользуемся формулой для биссектрисы в треугольнике SPQ. Получим

$$SL = \frac{2SQ\cdot SP\cdot\cos\varphi}{SQ+SP} = \frac{40\sqrt{2}}{21},$$

откуда

$$\cos\omega = \frac{7}{11}.$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Шарик сможет совершить полный оборот, двигаясь по окружности, в том случае, если в точке, диаметрально противоположной точке A, натяжение нити будет больше нуля или равно нулю. Минимальная скорость в точке A соответствует нулевому натяжению нити в верхней точке траектории. Обозначим через v_{min} минимальную скорость шарика в точке A, через u – скорость шарика в диаметрально противоположной точке и запишем закон сохранения энергии для этих двух точек:

$$\frac{mv_{min}^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + 2mgl\sin\alpha.$$

Здесь m – масса шарика, а потенциальная энергия в поле тяжести отсчитывается от точки A. При отсутствии натяжения нити в верхней точке центростремительное ускорение шарику сообщает только проекция силы тяжести $mg\sin\alpha$, поэтому уравнение движения шарика для этой точки имеет вид

$$mg\sin\alpha = m\frac{u^2}{l}.$$

Из совместного решения двух уравнений найдем искомую скорость:

$$v_{min} = \sqrt{5gl\sin\alpha}.$$

2. Плотность влажного воздуха складывается из плотности пара и плотности сухого воздуха:

$$\rho = \frac{M_п p_п}{RT} + \frac{M_в p_в}{RT},$$

где $p_п$ и $p_в$ – парциальные давления водяного пара и воздуха соответственно. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений пара и сухого воздуха:

$$p = p_п + p_в.$$

Из полученных уравнений найдем искомое отношение:

$$\frac{p_п}{p_в} = \frac{1 - \dfrac{\rho RT}{M_в p}}{\dfrac{\rho RT}{M_в p} - \dfrac{M_п}{M_в}} = 0{,}027.$$

3. 1) Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается равным нулю, а ток через резистор сопротивлением R_2 равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = 0{,}5\ А.$$

2) В некоторый момент времени после замыкания ключа напряжение на конденсаторе будет равно $\mathcal{E}/3$ (рис.14). По

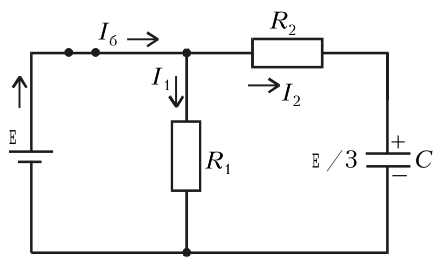

Рис. 14

закону Ома для замкнутой цепи для контура, содержащего батарею и резистор сопротивлением R_1, можно записать

$$\mathcal{E} = I_1 R_1,$$

а для контура, охватывающего батарею, резистор сопротивлением R_2 и конденсатор, –

$$\mathcal{E} = I_2 R_2 + \frac{\mathcal{E}}{3}.$$

Очевидно, что ток через батарею равен

$$I_б = I_1 + I_2.$$

Отсюда находим

$$I_б = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{11}{6}\ А\ = 1{,}83\ А.$$

4. На рамку с током I, протекаемым против часовой стрелки,

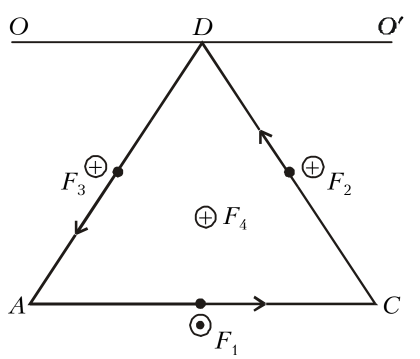

Рис. 15

будут действовать четыре силы: три силы Ампера $\vec F_1$, $\vec F_2$, $\vec F_3$ и сила тяжести $\vec F_4 = m\vec g$ (рис.15). Сила $\vec F_1$ направлена вертикально вверх, приложена к середине стороны AC и равна $F_1 = IaB$. Силы $\vec F_2$ и $\vec F_3$ направлены вертикально вниз, приложены к серединам сторон DC и AD и равны $F_2 = F_3 = IaB\sin 30°$. Сила тяжести приложена в точке пересечения биссектрис треугольника. Очевидно, что рамка начнет приподниматься относительно вершины D. Подъем рамки начнется при условии, что суммарный момент сил относительно оси OO' будет больше нуля или равным нулю:

$$IaB \cdot \frac{a\sqrt3}{2} - 2 \cdot IaB \cdot \frac12 \cdot \frac{a\sqrt3}{4} - Mg\frac{a}{\sqrt3} \ge 0.$$

В этом уравнении первый член соответствует моменту силы F_1, второй член – моментам сил $\vec F_2$ и $\vec F_3$, а последний – моменту силы тяжести. Величина тока, при котором рамка начнет приподниматься относительно вершины D, равна

$$I = \frac43\frac{Mg}{aB}.$$

5. Обозначим минимальное расстояние между двумя точками, которое часовщик может рассмотреть с расстояния наилучшего зрения, через l. Угловой размер этого расстояния равен $\varphi_1 = l/d_0$. Под таким углом лучи от этих точек проходят через оптический центр хрусталика глаза часовщика. При использовании лупы минимальный размер равен l/N, а угловой – $\varphi_2 = (l/N)/F$, где F – фокусное расстояние лупы. Из условия равенства угловых размеров находим

$$F = \frac{d_0}{N} = \frac{25}{3}\ см \approx 8{,}3\ см.$$

Вариант 2

1. 1) $v = L\sqrt{k/m}$; 2) $T = 2(\pi + 1)\sqrt{m/k}$.

2. 1) $v = \left(3v_0 + \sqrt{9v_0^2 + 42gR}\middle/21\right)$; 2) $L = v_0 t_0/7$.

3. $A = -\dfrac35 RT\dfrac{\Delta p}{p} \approx -12{,}5$ Дж.

4. 1) $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$; 2) $Q = \dfrac{C_2^2}{C_1 + C_2}\dfrac{\mathcal{E}^2}{2}$.

5. $n = 2H/L = 10/7 \approx 1{,}43$.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x_1 = 2$, $x_2 = (2a+1)/2$ при $a \ne -1, -1/6, 3/2, 2$; $x = -1/2$ при $a = -1$; $x = 2$ при $a = -1/6$ и $a = 3/2$; $x = 5/2$ при $a = 2$.

2. $\left(2; \dfrac73\right) \cup (3; +\infty)$. **3.** $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $18\sqrt2$.

5. 22 и 31. *Указание.* Пусть x и y – количества студентов в 1 и во 2 группах. Из условия следует, что

$$\begin{cases} x + y \ge 53, \\ x \ge 2(y - 21) + 1, \\ y \ge 5(x - 16) + 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Перепишем систему (1) так:

$$\begin{cases} y \ge 53 - x, \\ y \le \dfrac{x}{2} + \dfrac{41}{2}, \\ y \ge 5x - 79. \end{cases} \qquad (2)$$

Из системы (2) получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{41}{2} \ge 53 - x, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{41}{2} \ge 5x - 79, \end{cases}$$

откуда

$$21\frac{2}{3} \le x \le 22\frac{1}{9},$$

но это значит, что $x = 22$, при этом $y = 31$.

Вариант 2

1. $\left(3/(1-2a);\ 3/(2a-1)\right)$ при $a \ne \pm 1/2$; $(u+3;\ u)$, $u \in \boldsymbol{R}$ при $a = -1/2$; нет решений при $a = 1/2$.

2. $\left(\left(3+\sqrt{3}\right)/3;\ 5/3\right) \cup (2;\ +\infty)$.

3. $x = (-1)^n \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнению удовлетворяют все корни уравнения $\sin 2x = 3/4$, а также корни уравнения

$$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin 2x \le \frac{3}{4}$.

4. $R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60° - \alpha)\right)$; $\alpha = 30°$.

Указание. Пусть M и N – точки касания сторон ED и CD с окружностью, O – центр окружности (рис.16). Воспользуйтесь тем, что

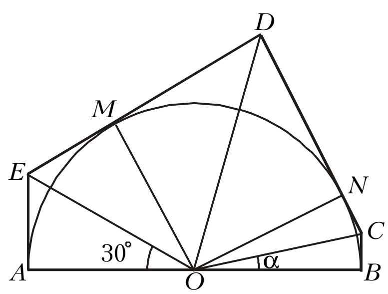

Рис. 16

$$S_{ABCDE} = 2\left(S_{OAE} + S_{OBC} + S_{OND}\right), \text{ а } \angle NOD = 60° - \alpha.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60° - \alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{2\cos 2(\alpha - 30°) + 1},$$

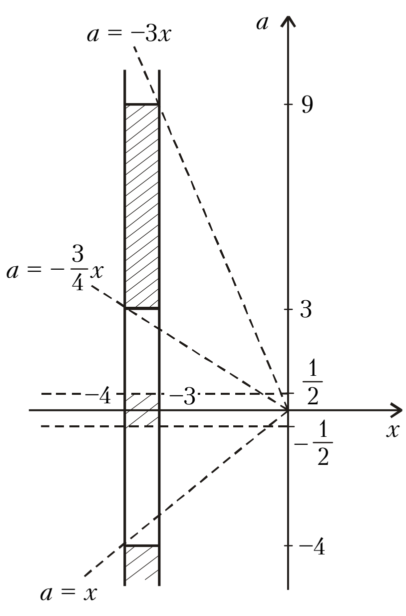

Рис. 17

наименьшее значение площади достигается при $\cos 2(\alpha - 30°) = 1$, т.е. при $\alpha = 30°$.

5. 1) $(-8;\ -2) \cup (0;\ 6)$; 2) $a \in (-\infty;\ -4) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right) \cup (3;\ 9)$.

Указание. Исходное неравенство равносильно совокупности из двух систем

$$\begin{cases} 0 < |2a| < 1, \\ 3x^2 + ax > 4a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} |2a| > 1, \\ 0 < 3x^2 + ax < 4a^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 < |a| < \frac{1}{2}, \\ (x-a)\left(x + \frac{4}{3}a\right) > 0, \\ -4 \le x \le -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} |a| > \frac{1}{2}, \\ (x-a)\left(x + \frac{4}{3}a\right) < 0, \\ x(3x+a) > 0. \end{cases}$$

Изобразим в левой полуплоскости плоскости xOa точки $(x;\ a)$, удовлетворяющие этой совокупности, а затем найдем проекцию на ось Oa точек $(x;\ a)$, принадлежащих множеству решений при всех $-4 \le x \le -3$ (это множество показано штриховкой на рисунке 17).

ФИЗИКА

1. $\sqrt{\frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{R\sin\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}} \le \omega \le \sqrt{\frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{R\sin\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}}$.

2. $Q = 3mv^2/16$. **3.** $x = 0{,}02\cos\left(100t + \frac{\pi}{6}\right)$; $s = 0{,}4$ м.

4. $\rho = \frac{\rho_0 n}{n-1} = 2{,}7$ г/см^3, где $\rho_0 = 1$ г/см^3 – плотность воды.

5. $\eta = \frac{5\nu R\Delta T}{2Q} - \frac{2}{3} = 0{,}16 = 16\%$.

6. $Q = \frac{CR\left(\left(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\right)^2 - 4\mathcal{E}_3^2\right)}{8(R+r)} = 5{,}3$ мкДж.

7. $P_{\text{тепл}} = 2I_1^2 R_1 = 180$ Вт.

8. $I = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}} = 10$ мА; $I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 14$ мА.

9. $\lambda_2 = \frac{n^2\lambda_{\text{кр}}\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}} - \lambda_1\left(1 - n^2\right)} = 200$ нм.

10. $F_1 = d\Gamma/(\Gamma + 1) = 10$ см или $F_2 = d\Gamma/(\Gamma - 1) = 15$ см.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по основанию 3 и обозначьте $y = \log_3|x|$.

2. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi}$; заметьте, что область определения уравнения задается условием $\sin\frac{2x}{3} \ne 0$.

3. $y = 2x + \frac{7}{6}$, $y = 2x - \frac{10}{3}$. *Указание.* Угловой коэффициент касательной должен равняться 2.

4. $180\sqrt{2}$ см^2, 2160 см^3. *Указание.* Сечение – равнобедренная трапеция AB_1C_1D.

5. 270 км. *Указание.* Первое плавание продолжается на $\frac{180}{0,8v}-\frac{180}{v}$ часов больше, чем второе, поэтому $\frac{180}{0,8v}-\frac{180}{v}=$ $=3,5-1,5$, откуда $v=22,5$ (км/ч).

Вариант 2

1. $(0;1)\cup\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2;2\right)$. *Указание.* Учитывая область определения, рассмотрите два случая: $0<x<1$ и $1<x<2$.

2. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Заметьте, что

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

3. $y=2\sqrt{2}x+1$, $y=-2\sqrt{2}x+1$.

4. 60 см^2, 480 см^3. *Указание.* Сечение – прямоугольник.

5. 4 часа и 6 часов. *Указание.* Пусть V – объем бассейна, t_1 и t_2 – искомые промежутки времени. Тогда производительности труб равны V/t_1 и V/t_2, и из условия получаем

$$\begin{cases}\left(\frac{V}{t_1}+\frac{V}{t_2}\right)\cdot\frac{12}{5}=V,\\ \frac{V}{t_1}\cdot\frac{t_2}{4}+\frac{V}{t_2}\cdot\frac{t_1}{4}=\frac{13}{24}V.\end{cases}$$

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}4+\pi k$, $n,\ k\in\mathbf{Z}$.

2. $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}3=\operatorname{arcctg}3=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. *Указание.* Угол между касательной и осью абсцисс равен $\operatorname{arctg}3$.

3. $(1/3;\ 1)$.

4. 1, –1.

5. $\sqrt{S/\pi}\left(\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{S/\pi}\cdot\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\alpha/2$. *Указание.* Пусть R – радиус основания конуса. Тогда высота конуса равна $R\operatorname{tg}\alpha$, радиус вписанного шара – $R\operatorname{tg}\alpha/2$.

Вариант 4

1. $125\sqrt{6}/16$.

2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

3. $\left(0,5^8;\ 0,5\right)$. *Указание.* Область определения задается условием $\log_2\log_{0,5}x>0$, откуда $\log_{0,5}x>1$, т.е. $0<x<0,5$.

4. 0, 1.

5. 9, –16.

Задачи устного экзамена

1. *Указание.* $1\pm\sin\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

2. 1. *Указание.* Запишите данное выражение в виде

$$\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}25^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}25^\circ$$

и приведите к общему знаменателю.

3. –1. *Указание.* «Сверните» выражение, записав сумму логарифмов как логарифм произведения.

4. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Заметьте, что $\sin x\ge-1$, $|\cos x|\ge0$.

5. $2\left(\sqrt{2}-1\right)/3\sqrt{5}$.

6. $AB=BC=8\left(2+\sqrt{3}\right)$ дм, $AC=8\left(3+2\sqrt{3}\right)$ дм. *Указание.* Сначала найдите BO, где O – центр вписанной окружности.

7. Боковая сторона равна 10 см, $h_{осн}=8$ см, $h_{бок}=9,6$ см. *Указание.* Пусть α – угол при основании. Найдите $\operatorname{tg}\alpha/2$, затем $\operatorname{tg}\alpha$.

8. 15 см, 20 см, 25 см. *Указание.* Найдите AC и $\angle ABC$, равный углу между перпендикулярами из условия.

9. $(-\infty;\ 2)$. *Указание.* Заметьте, что

$$x\left(\log_7 21-1\right)=x\log_7 3=\log_7 3^x.$$

10. Больше нуля.

11. 10.

12. $\left(\sqrt{5}-3\right)/2$, $\left(9-\sqrt{29}\right)/2$. *Указание.* Учитывая, что $x\ge-3$, рассмотрите случаи $-3\le x<1$ и $x\ge1$.

13. 2, –2/9. *Указание.* Пусть корни уравнения равны a и $4a$ ($a\ne0$). Запишите теорему Виета и решите получившуюся систему уравнений.

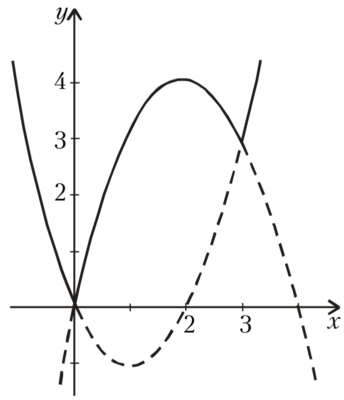

Рис. 18

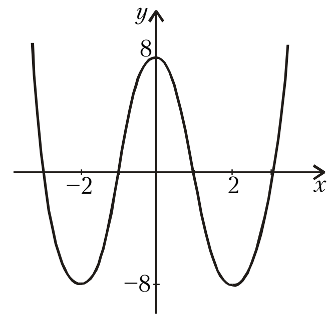

Рис. 19

14. См. рис.18.

15. См. рис.19.

ФИЗИКА

1. $h=245$ м. **2.** $m=3,6$ кг. **3.** $m\approx0,2$ кг.
4. $A=18$ кДж. **5.** $I_1=1,2$ А; $I_2=0,3$ А.
6. $Q=1,8$ кДж. **7.** $I=10^{-5}$ А. **8.** $n=\sqrt{3}\approx1,7$.
9. $k\approx4,35$. **10.** Не возникнет.

VIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. 322357176.

2. См. рис.20.

3. (3; 5; 7). *Указание.* Если a, b, c – искомые простые числа, то $abc=7(a+b+c)$. Пусть, для определенности, $a=7$. Тогда $bc=b+c+7$, т.е. $(b-1)(c-1)=8$.

4. $\frac{1}{12}S$. *Указание.* Заметим, что $S_{ABK}=\frac{1}{4}S$. Пусть P – середина отрезка LC. Тогда MP – средняя линия треугольника BLC, а KL – средняя линия треугольника AMP. Поэтому $PC=LP=AL$, т.е. $AL=$ $=\frac{1}{3}BC$, $S_{ABL}=\frac{1}{3}S$ и $S_{AKL}=$ $=S_{ABL}-S_{AKB}$.

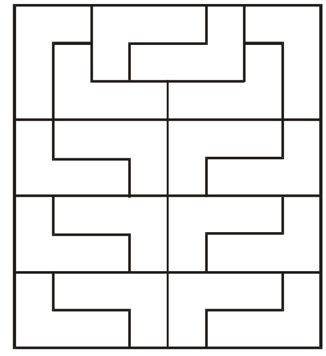
Рис. 20

5. $\left(\pm 3\sqrt{2}; -3\pm 3\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Сложите уравнения системы.
6. Нельзя. *Указание.* Масса восьми самых легких камней больше трех тонн.
7. 110°. *Указание.* Пусть P – точка пересечения прямых DE и AB. Поскольку $AB = BP = BC$, треугольник APC – прямоугольный, а точки F и C лежат на окружности с диаметром AP. Поэтому $\angle AFC = 180° - \angle APC = 160°$, а $\angle DFC = 360° - (90° + 160°) = 110°$.

ФИЗИКА

1. $t = \sqrt{L^2 + \left(h_1 + h_2\right)^2} \Big/ v = 250$ с ≈ 4 мин. **2.** $v = \sqrt{gh}$.

3. $A_{\min} = F_0 l/2$. **4.** $F = \frac{\sigma q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2l)^2}$.

5. $R_1 = r\left(1+\sqrt{3}\right)$; $R_2 = r\left(\sqrt{3}-1\right)$.

6. $t \approx 4\frac{\rho_0}{\rho_п}\frac{\lambda}{r}\frac{h}{v} \approx 0{,}03$ с. *Указание.* Здесь $\rho_п = \frac{p_0 \mathrm{M}}{RT}$ – плотность насыщенного водяного пара при 0 °С, $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ – тепловая скорость молекул воды.

7. $\Delta R \approx \frac{1}{6}\frac{\rho_0}{\rho}R \approx 1$ см.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. $B > A$.
2. $(P+Q)/2$.
3. Нет (оно делится на 5).
4. Равнобедренный и прямоугольный с катетами $a = b$.
5. 12600. *Указание.* Разобьем все числа от 0 до 999 на пары: (0, 999), (1, 998), …, (499, 500). Суммы цифр каждой пары равны 27. Осталось из числа $500 \cdot 27$ вычесть сумму цифр всех чисел от 0 до 99, которая равна $50 \cdot 18$.
6. Нельзя. *Указание.* Суммы углов 14 треугольников меньше суммы углов 17-угольника.
7. Не играли. *Указание.* Каждый из двух выбывших игроков сыграл 5 партий. Общее число сыгранных ими партий равно 9, если они играли между собой, и 10, если не играли. Оставшиеся игроки в своем подтурнире сыграли либо 29, либо 28 партий.
8. Нет. *Указание.* Пусть $6n = p^6$, а $8n = q^8$, тогда $\frac{3}{4} = \left(\frac{p^3}{q^4}\right)^2$, т.е. $\sqrt{3} = 2\frac{p^3}{q^4}$ – рациональное число. Противоречие!

9. $A < B$. *Указание.* $A = 1 - \frac{1}{10} < 1$, $B = \frac{1}{11} + \ldots \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \ldots + \frac{1}{40} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.

10. $28 \cdot 15 = 420$. *Указание.* Число прямоугольников равно произведению количества пар вертикальных прямых на количество пар горизонтальных прямых.

ФИЗИКА

1. $m_2 > m_3 > m_1$.
2. Больше скорости звука в воздухе.
3. *Указание.* Эффект связан с многократными отражениями звуковой волны от стены.
4. Нет.
5. Перпендикулярно линии горизонта за горизонт.
6. $F_{\min} = 750$ Н; $\mu_{\min} = 0{,}75$.
7. Да.
8. Во внутреннюю энергию диэлектрика.
9. *Указание.* Альфа-частица отклоняется на значительный угол, если электрическая энергия ее взаимодействия с положительным ядром того же порядка, что и кинетическая энергия частицы.
10. Максимумы кривой $W(\alpha)$ расположены вблизи точек поворота маятника (где скорость минимальна), а минимумы – вблизи положений равновесия маятника (где скорость максимальна).

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. От древнегреческих слов (дошедших до нас через латынь), означавших столик, еловая шишка, валик.
2. $a^2 = bc$.
3. Например: π, e, 0.
4. Трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба, построение циркулем и линейкой правильного 7-угольника.
5. Например: Монж, Лаплас, Кондорсе, Карно, Улугбек, Вышеградский, Веллис.

ФИЗИКА

1. Эрнест Резерфорд провел опыты по рассеянию α-частиц на золотых фольгах и предложил планетарную модель атома.
2. Древнегреческий ученый Клавдий Птолемей (ок. 90 – ок. 160) построил геоцентрическую картину мира.
3. Джон Адамс (Англия) и Урбен Леверье (Франция) в середине XIX века, независимо друг от друга, вычислили орбиту и положение планеты Нептун на основе исследования возмущений Урана.
4. Аристотель предполагал, что скорость тела пропорциональна действующей на него силе. Механика Аристотеля описывает установившееся движение с учетом силы вязкого трения.
4. Пусть l_1 – дальность прыжка по ветру, l_2 – против ветра, u – скорость ветра, v – горизонтальная составляющая скорости прыгуна. Тогда $l_1 = (v+u)\tau$, $l_2 = (v-u)\tau$. Длительность прыжка τ можно оценить, считая, что прыжок происходит под углом 45° к горизонту, тогда $\tau = 2v/g$.