Узы дружбы в

«Среди всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными приложений, чем те, которые состоят в изучении природы числа и исследования делителей... В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям подобного рода... А именно, они не только считали, что отыскание истины похвально само по себе и достойно человеческого познания, но, кроме того, совершенно справедливо полагали, что при этом замечательным образом развивается изобретательность и перед человеческим разумом раскрываются новые возможности решать сложные задачи...»

Леонард Эйлер. О дружественных числах *(1849).*

В мире чисел существует множество всевозможных отношений. Мы сравниваем числа по величине, по принадлежности их к тем или иным классам (четных, простых, удовлетворяющих определенным уравнениям и т.п.). Ряд любопытных отношений связан с собственными делителями натуральных чисел. Напомним, что к *собственным* делителям натурального числа относятся лишь те делители, которые отличны от него самого, например, собственные делители числа 6 – это 1, 2, 3. Назовем число *a приветливым к* числу *b*, если сумма собственных делителей *a* равна числу *b*. Так, число 16 приветливо к числу 15, потому что $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, а 15 уже *не* приветливо к 16, потому что $1 + 3 + 5 = 9 \neq 16$.

На рисунке 1 показана *схема приветливости* некоторой группы чисел. Рассматривать (и рисовать) подобные

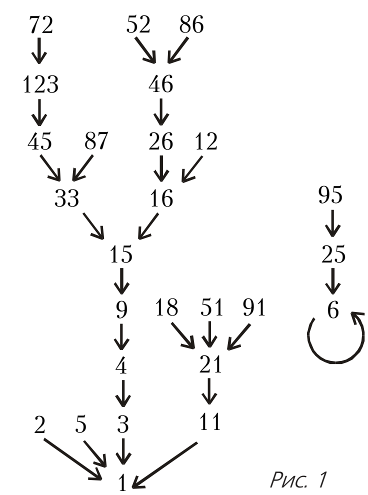

Рис. 1

схемы порой бывает так же интересно и увлекательно, как и рассматривать географические атласы. Каждое число на этой схеме, за исключением 1, приветливо к какому-нибудь другому числу. Числа 2, 5 не вызывают симпатий ни у кого (интересно, имеются ли еще и другие «несимпатичные» числа?), а вот число 6 приветливо к самому себе: $1 + 2 + 3 = 6$. Числа, приветливые к самим себе, в математике получили название *совершенных*. Они цени-

Арабский математик Сабит ибн Курра (836—901) придумал следующий способ получения дружественных чисел. Если числа p, q и r – простые нечетные числа вида $p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^k - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$, то числа $m = 2^k pq$ и $n = 2^k r$ – дружественные.

При $k = 2$ по рецепту Сабита ибн Курры получаются дружественные числа 220 и 284, при $k = 4$ – пара дружественных чисел 17296 и 18416, а при $k = 7$ – дружественные числа 9363584 и 9437056. Дальнейшие попытки найти этим способом дружественные пары, перебирая значения k от 8 до 20000, к успеху не приводят.

Один из первых способов получения совершенных чисел придумали пифагорейцы. В IX книге евклидовых «Начал» он формулируется так:

«Если от единицы откладывать сколь угодно последовательно пропорциональных чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделается первым (т.е. простым – *Прим.ред.*) числом и вся совокупность, умноженная на последнее число, произведет что-то, то возникающее число будет совершенным». В современной терминологии, число $\left(1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}\right)\cdot 2^{k-1} = \left(2^k-1\right)\cdot 2^{k-1}$ является совершенным, если число $2^k - 1$ простое. Этот факт получается из аккуратного подсчета суммы собственных делителей числа $\left(2^k-1\right)\cdot 2^{k-1}$.

Справедлив и более общий факт: четное число совершенно тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\left(2^k-1\right)\cdot 2^{k-1}$, где $2^k - 1$ – простое число.

«Работы, посвященные нечетным совершенным числам, напоминают охоту за призраком: никто никогда его не видел, но проведено много остроумных исследований того, как он не может выглядеть»

Вальтер Боро, современный немецкий математик

мире чисел

лись и почитались в старину. Например, в Древнем Риме существовал обычай отводить на пирах шестое место самым знатным и почетным гостям. К совершенным числам относятся 28, 496, 8128 и другие. В наше время поиском больших совершенных чисел занимаются компьютеры.

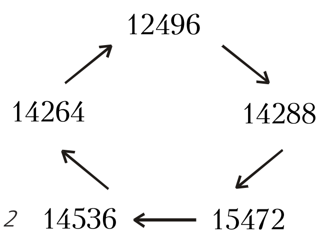

Рис. 2

Существуют ли два числа, приветливых друг к другу? Да, например числа 220 и 284 (пожалуйста, проверьте) – они были известны еще Пифагору. По свидетельству неопифагорейца Ямвлиха из Хальциса (III в.), великий Пифагор на вопрос, кого следует считать своим другом, ответил: «Того, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Два натуральных числа a и b называются *дружественными*, если a приветливо к b, а b приветливо к a.

В мире чисел существуют и более причудливые связи. Если в схеме приветливости обнаруживается «хоровод», в котором кружится более чем два числа, то такие числа называются *общительными*. На рисунке 2 показан «хоровод», объединяющий пять общительных чисел, а вокруг текста на этой странице водят «хоровод» аж 28 общительных чисел»! Существуют ли более крупные «хороводы»? Неизвестно.

На схему приветливости можно взглянуть и по-другому: как на систему «рек», впадающих в более крупные «русла» и «водосборы». Такие ассоциации вызывает рисунок 1: в пунктах, обозначенных числами 15, 21, 46, 33, сливаются русла нескольких «речушек» – соответствующих цепочек чисел. Существуют ли «реки», берущие начало в некотором числе и устремляющиеся в бесконечность? Это один из вопросов, на которые пока нет ответа.

А.Жуков

Удивительные числовые «раскопки» провел в 1747—1750 гг. Леонард Эйлер. Придумав несколько оригинальных числовых методов, он подарил изумленным современникам сразу 61 пару дружественных чисел, причем среди найденных им чисел оказались и нечетные, например 69615 и 11498355, 87633 и 12024045.

Неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа. По крайней мере, среди первых 10^{50} чисел нечетных совершенных чисел нет.

Если нечетное совершенное число существует, то оно должно содержать по меньшей мере 6 различных простых делителей и иметь вид $n = p^{4r+1} q_1^{2s_1} q_2^{2s_2} \dots q_m^{2s_m}$, где p – простое число вида $4k+1$, а $q_1, q_2, \dots, q_m$ – произвольные простые нечетные числа. При этом если все s_k, кроме s_1, равны 1, то $s_1 \neq 2$, а если все s_k, кроме s_1 и s_2, равны 1, то $s_1 \neq 2$ и $s_2 \neq 2$. Не может быть и того, что все $s_k = 2$.

Если наименьший из простых делителей числа n равен $t+1$, то это число должно иметь по крайней мере t простых делителей.

В старину дружественные числа служили для изготовления талисманов, якобы сохраняющих и укрепляющих дружбу. Мадридский ученый аль-Маджрити (ум. 1007) в своем трактате «Цель мудреца» приводит «чудодейственный рецепт», позволяющий добиться взаимности в любви. Оказывается, для этого достаточно записать на чем-либо числа 220 и 284, меньшее дать съесть предмету страсти, а большее съесть самому...

Пары дружественных чисел в пределах 100 000:

220 – 284
1184 – 1210
2620 – 2924
5020 – 5564
6232 – 6368
10744 – 10856
12285 – 14595
17296 – 18416
63020 – 76084
66928 – 66992
67095 – 71145
69615 – 87633
79750 – 88730

Любопытно, что в 1866 году 16-летний итальянец Н.Паганини (однофамилец великого скрипача) нашел пару дружественных чисел 1184 и 1210, которую все, в том числе и выдающиеся математики, проглядели!

Дружественные числа скрывают множество загадок. Каков общий закон образования таких чисел? Существуют ли среди дружественных чисел смешанные пары, в которых одно число четное, а другое – нечетное? Сколько всего дружественных чисел? Конечно их количество или бесконечно? На эти и другие вопросы