4. $180\sqrt{2}$ см^2, 2160 см^3. *Указание.* Сечение – равнобедренная трапеция AB_1C_1D.

5. 270 км. *Указание.* Первое плавание продолжается на $\frac{180}{0{,}8v}-\frac{180}{v}$ часов больше, чем второе, поэтому $\frac{180}{0{,}8v}-\frac{180}{v}=$ $=3{,}5-1{,}5$, откуда $v=22{,}5$ (км/ч).

Вариант 2

1. $(0;1)\cup\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2;2\right)$. *Указание.* Учитывая область определения, рассмотрите два случая: $0<x<1$ и $1<x<2$.

2. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Заметьте, что
$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

3. $y=2\sqrt{2}x+1$, $y=-2\sqrt{2}x+1$.

4. 60 см^2, 480 см^3. *Указание.* Сечение – прямоугольник.

5. 4 часа и 6 часов. *Указание.* Пусть V – объем бассейна, t_1 и t_2 – искомые промежутки времени. Тогда производительности труб равны V/t_1 и V/t_2, и из условия получаем
$$\begin{cases}\left(\dfrac{V}{t_1}+\dfrac{V}{t_2}\right)\cdot\dfrac{12}{5}=V,\\ \dfrac{V}{t_1}\cdot\dfrac{t_2}{4}+\dfrac{V}{t_2}\cdot\dfrac{t_1}{4}=\dfrac{13}{24}V.\end{cases}$$

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}4+\pi k$, $n,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

2. $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}3=\operatorname{arcctg}3=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. *Указание.* Угол между касательной и осью абсцисс равен $\operatorname{arctg}3$.

3. (1/3; 1).

4. 1, –1.

5. $\sqrt{S/\pi}\left(\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{S/\pi}\cdot\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\alpha/2$. *Указание.* Пусть R – радиус основания конуса. Тогда высота конуса равна $R\operatorname{tg}\alpha$, радиус вписанного шара – $R\operatorname{tg}\alpha/2$.

Вариант 4

1. $125\sqrt{6}/16$.

2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $k,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

3. $\left(0{,}5^8;\ 0{,}5\right)$. *Указание.* Область определения задается условием $\log_2\log_{0,5}x>0$, откуда $\log_{0,5}x>1$, т.е. $0<x<0{,}5$.

4. 0, 1.

5. 9, –16.

Задачи устного экзамена

1. *Указание.* $1\pm\sin\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

2. 1. *Указание.* Запишите данное выражение в виде
$$\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}25^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}25^\circ$$
и приведите к общему знаменателю.

3. –1. *Указание.* «Сверните» выражение, записав сумму логарифмов как логарифм произведения.

4. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Заметьте, что $\sin x\ge-1$, $|\cos x|\ge0$.

5. $2\left(\sqrt{2}-1\right)/3\sqrt{5}$.

6. $AB=BC=8\left(2+\sqrt{3}\right)$ дм, $AC=8\left(3+2\sqrt{3}\right)$ дм. *Указание.* Сначала найдите BO, где O – центр вписанной окружности.

7. Боковая сторона равна 10 см, $h_{осн}=8$ см, $h_{бок}=9{,}6$ см. *Указание.* Пусть α – угол при основании. Найдите $\operatorname{tg}\alpha/2$, затем $\operatorname{tg}\alpha$.

8. 15 см, 20 см, 25 см. *Указание.* Найдите AC и $\angle ABC$, равный углу между перпендикулярами из условия.

9. $(-\infty;2)$. *Указание.* Заметьте, что
$$x\left(\log_7 21-1\right)=x\log_7 3=\log_7 3^x.$$

10. Больше нуля.

11. 10.

12. $\left(\sqrt{5}-3\right)/2$, $\left(9-\sqrt{29}\right)/2$. *Указание.* Учитывая, что $x\ge-3$, рассмотрите случаи $-3\le x<1$ и $x\ge1$.

13. 2, –2/9. *Указание.* Пусть корни уравнения равны a и $4a$ ($a\ne0$). Запишите теорему Виета и решите получившуюся систему уравнений.

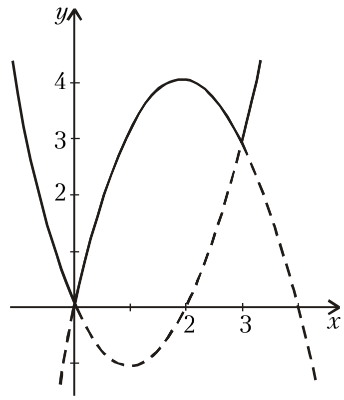

Рис. 18

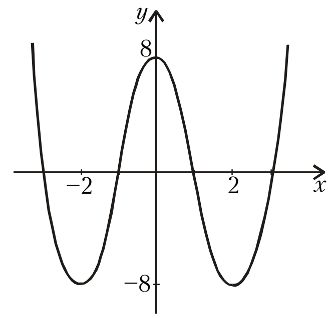

Рис. 19

14. См. рис.18.

15. См. рис.19.

ФИЗИКА

1. $h=245$ м. **2.** $m=3{,}6$ кг. **3.** $m\approx0{,}2$ кг.

4. $A=18$ кДж. **5.** $I_1=1{,}2$ А; $I_2=0{,}3$ А.

6. $Q=1{,}8$ кДж. **7.** $I=10^{-5}$ А. **8.** $n=\sqrt{3}\approx1{,}7$.

9. $k\approx4{,}35$. **10.** Не возникнет.

VIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. 322357176.

2. См. рис.20.

3. (3; 5; 7). *Указание.* Если a, b, c – искомые простые числа, то $abc=7(a+b+c)$. Пусть, для определенности, $a=7$. Тогда $bc=b+c+7$, т.е. $(b-1)(c-1)=8$.

4. $\frac{1}{12}S$. *Указание.* Заметим, что $S_{ABK}=\frac{1}{4}S$. Пусть P – середина отрезка LC. Тогда MP – средняя линия треугольника BLC, а KL – средняя линия треугольника AMP. Поэтому $PC=LP=AL$, т.е. $AL=$ $=\frac{1}{3}BC$, $S_{ABL}=\frac{1}{3}S$ и $S_{AKL}=$ $=S_{ABL}-S_{AKB}$.

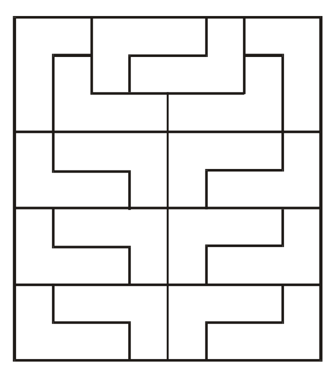

Рис. 20