б) Радиус R окружности, описанной около треугольника BPQ, равен

$$R = \frac{BQ}{2\sin\alpha} = \frac{3}{2\sqrt{2}BQ},$$

где

$$BQ = BE + EQ = 3 + EQ,\ EQ = \frac{3}{7}EC = \frac{9}{7},$$

откуда

$$BQ = \frac{30}{7},\ R = \frac{45\sqrt{2}}{28}.$$

5. а) 8; б) $10 - \pi$; в) $6 - \pi$.

Указание. а) Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие в квадрате (рис.12) с вершинами $A(-2;\,0)$, $B(0;\,2)$, $C(2;\,0)$, $D(0;\,-2)$. Площадь этого квадрата равна 8.

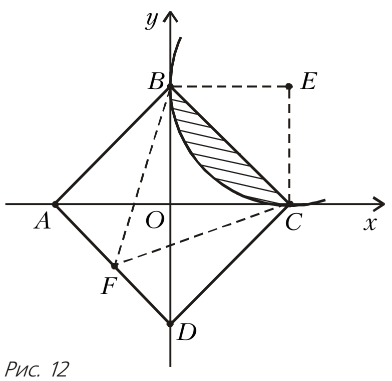

Рис. 12

б) Второму неравенству, которое можно записать в виде

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \ge 4,$$

удовлетворяют точки квадрата, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке $E(2;\,2)$.

в) Прямые $y - 3x - 2 = 0$ и $3y - x + 2 = 0$ пересекаются в точке $F(-1;\,1)$ и проходят соответственно через точки B и C. Третьему неравенству удовлетворяют точки двух вертикальных углов с вершиной F, один из этих углов – угол, образуемый лучами FB и FC и содержащий точку O, а системе из трех неравенств – точки «криволинейного треугольника» FBC.

6. а) $\frac{77}{36}$; б) $\frac{40\sqrt{2}}{33}$; в) $\arccos\frac{7}{11}$.

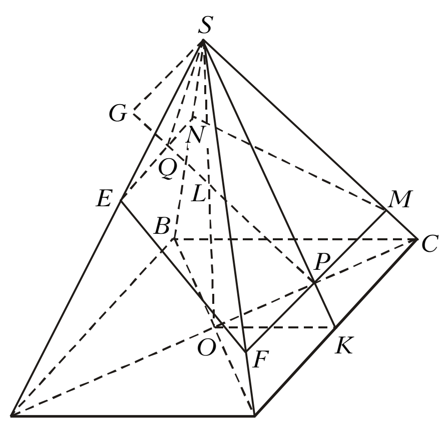

Рис. 13

Решение. При пересечении пирамиды плоскостью α получается равнобедренная трапеция $ENMF$ (рис.13), где

$$EN \,||\, FM \,||\, CD.$$

а) Пусть P и Q – середины сторон FM и EN, σ – площадь сечения. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}(EN + FM)PQ,$$

где

$$EN = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3},\ FM = \frac{5}{6}CD = \frac{5}{3}.$$

Если O – центр основания $ABCD$, L – точка пересечения SO и PQ, $\varphi = \angle QSL = \angle PSL$, K – середина CD, то

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = 3,\ SP = \frac{5}{6}SK = \frac{5}{2},\ SQ = \frac{1}{3}SK = 1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \sin\varphi = \frac{1}{3},\ \cos 2\varphi = \frac{7}{9},$$

$$\sin 2\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Из ΔSPQ по теореме косинусов находим

$$PQ = \frac{11}{6},\ \sigma = \frac{77}{36}.$$

б) Искомый радиус r сферы равен расстоянию от точки A до плоскости α, а $r = 2x$, где x – расстояние от точки S до плоскости α. Но x – высота SG в треугольнике SPQ, проведенная из вершины S. Пусть σ_1 – площадь треугольника SPQ, тогда

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}SQ\cdot SP\sin 2\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{9},\ x = \frac{2\sigma_1}{PQ} = \frac{20\sqrt{2}}{33},\ r = 2x = \frac{40\sqrt{2}}{33}.$$

в) Угол ω между плоскостью α и плоскостью $ABCD$ равен углу между SG и SL, так как $SG \perp \alpha$, $SL \perp ABCD$;

$\cos\omega = \frac{x}{SL}$. Для вычисления SL воспользуемся формулой для биссектрисы в треугольнике SPQ. Получим

$$SL = \frac{2SQ\cdot SP\cdot\cos\varphi}{SQ + SP} = \frac{40\sqrt{2}}{21},$$

откуда

$$\cos\omega = \frac{7}{11}.$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Шарик сможет совершить полный оборот, двигаясь по окружности, в том случае, если в точке, диаметрально противоположной точке A, натяжение нити будет больше нуля или равно нулю. Минимальная скорость в точке A соответствует нулевому натяжению нити в верхней точке траектории. Обозначим через $v_{\min}$ минимальную скорость шарика в точке A, через u – скорость шарика в диаметрально противоположной точке и запишем закон сохранения энергии для этих двух точек:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + 2mgl\sin\alpha.$$

Здесь m – масса шарика, а потенциальная энергия в поле тяжести отсчитывается от точки A. При отсутствии натяжения нити в верхней точке центростремительное ускорение шарику сообщает только проекция силы тяжести $mg\sin\alpha$, поэтому уравнение движения шарика для этой точки имеет вид

$$mg\sin\alpha = m\frac{u^2}{l}.$$

Из совместного решения двух уравнений найдем искомую скорость:

$$v_{\min} = \sqrt{5gl\sin\alpha}.$$

2. Плотность влажного воздуха складывается из плотности пара и плотности сухого воздуха:

$$\rho = \frac{\mathrm{M}_{\text{п}}p_{\text{п}}}{RT} + \frac{\mathrm{M}_{\text{в}}p_{\text{в}}}{RT},$$

где $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{в}}$ – парциальные давления водяного пара и воздуха соответственно. Давление влажного воздуха равно сумме пар-