б) Расстояние $\rho$ между прямыми $BC$ и $KE$ равно расстоянию от точки $C$ до плоскости $KEM$, так как прямая $BC$ параллельна этой плоскости. Вычислим двумя способами объем $v$ пирамиды $KEMC$:

$$v = \frac{1}{3}\rho S_1 = \frac{1}{3}hS_2,$$

где $S_1$ и $S_2$ – площади треугольников $KEM$ и $KMC$ соответственно,

$$h = EL\left(L \in KC,\ EL \| DF\right),\ h = \frac{1}{3}DF = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

Так как

$$S_1 = \frac{1}{2}KE \cdot KM \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

то

$$\rho = h = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

в) Пусть $O$ – центр сферы, проходящей через точки $A$, $B$, $E$ и $F$. Точка $O$ лежит на перпендикуляре к плоскости $ABF$, проведенном через центр $N$ окружности, описанной около треугольника $ABF$ (см. рис.10). Если $R$ – радиус этой окружности, а $x$ – радиус сферы, то

$$OB = OE = x,\ R = NF = \frac{AB}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = NA.$$

Пусть $ON = y$, $\angle ONE = \angle NEL = \beta$. Тогда из треугольника $ONA$ по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = y^2 + \frac{a^2}{3}, \qquad (1)$$

а из треугольника $ONE$ по теореме косинусов находим

$$x^2 = y^2 + NE^2 - 2y\cdot NE\cos\beta,$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{NL}{EL},\ NL = NF + FL = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{5a}{3\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ NE = \frac{EL}{\cos\beta} = a.$$

Следовательно,

$$x^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = a\sqrt{\frac{11}{6}}$.

## Вариант 2

**1.** $\left(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Потенцируя, получаем систему

$$\begin{cases} 5y - x - 2 = 3(y - x), \\ y - 2 - 4xy = 3y|x|, \\ y > x,\ x \neq 0, \\ y(y - 2 - 4xy) > 0, \end{cases}$$

равносильную данной. Рассмотрите 2 случая: $x > 0$ и $x < 0$.

**2.** $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi k$, $x = \frac{11}{9}\pi + 2\pi k$, $x = \frac{4}{9}\pi + 2\pi k$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

*Указание.* Уравнение равносильно совокупности из двух систем:

$$\begin{cases} \cos 2x \geq 0, \\ \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases}$$

**3.** $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$, $x = \frac{10}{3}$, $4 < x \leq 5$.

*Решение.* Область определения неравенства задается условиями

$$3x^3 - 22x^2 + 40x = 3x\left(x - \frac{10}{3}\right)(x - 4) \geq 0,\ x \neq 4,$$

откуда

$$0 \leq x \leq \frac{10}{3},\ x > 4.$$

Обозначим

$$f(x) = 3\left(x - \frac{10}{3}\right)(x - 4).$$

а) Пусть $x > 4$, тогда $f(x) > 0$. В этом случае исходное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\sqrt{xf(x)} \geq f(x),\ x \geq f(x),\ 3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x - 5) \leq 0,$$

откуда, учитывая условие $x > 4$, получаем $4 < x \leq 5$.

б) Пусть $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$, тогда $x - 4 < 0$, $f(x) \geq 0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{xf(x)} \leq f(x)$. Значение $x = \frac{10}{3}$ является решением этого неравенства, а если $0 \leq x < \frac{10}{3}$, то $f(x) > 0$ и неравенство примет вид

$$3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x - 5) \geq 0,$$

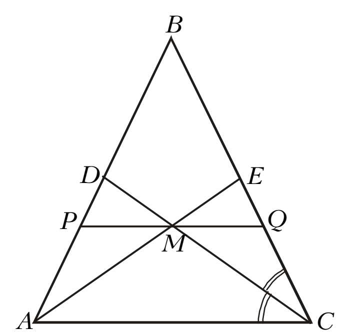

*Рис. 11*

откуда, с учетом условия $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$, получаем $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

**4.** $\frac{12}{7}$, $\frac{45\sqrt{2}}{28}$.

*Решение.* Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB = BC = \frac{2}{\cos\alpha} = 6$ (рис.11).

а) По свойству биссектрисы в треугольнике $ACE$ имеем

$$\frac{ME}{MA} = \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4},$$

откуда

$$\frac{ME}{AE} = \frac{3}{7}.$$

Из подобия треугольников $MEQ$ и $AEC$ следует, что

$$\frac{MQ}{AC} = \frac{ME}{AE} = \frac{3}{7},\ \text{откуда}\ MQ = \frac{12}{7}.$$