ной таблицы. Утверждение леммы по-прежнему нарушается. Но число участников уменьшилось, что и дает противоречие. Лемма доказана.

Предположим, что все участники турнира набрали разное количество очков, имеется ровно одна ничья и при этом есть странный игрок А. Согласно задаче 2 б) он не может занять первое или последнее место. Игроки Б и В, находящиеся на соседних местах, отличаются от А по сумме очков не меньше чем на $1/2$. Поэтому между собой они различаются не меньше чем на 1.

Удалим А из турнирной таблицы. Результаты слабых (которые выигрывали у А) уменьшатся на 1, а результаты сильных останутся без изменения. Поэтому у всех игроков снова будет разное число очков. Ничья сохранится, поскольку А (как странный) в ней не участвовал. Результаты Б и В теперь соседние, и их разность не меньше 2. Но в силу леммы это означает, что она равна 2, причем Б и В не участвуют в ничьей.

Как следствие, в исходной таблице результаты Б и В различаются на 1. Значит, оба они отличаются на $1/2$ от результата А. Но А, Б и В не участвуют в ничьей, поэтому их результаты – целочисленные. Получено искомое противоречие.

Геометрическая оптика

1. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{h}{(n-1)F} = \operatorname{arctg} 0{,}1$.

2. $l = \dfrac{1}{2D}\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0{,}9$ см.

3. $l = 5F = 50$ см; $v = 10\omega F = 5$ см/с; $\beta = \pi/2 - 2\alpha = 10°$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(3; -2)$. *Указание.* Сложите уравнения системы.

2. $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)-\sin 3x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)} = 1.$$

3. $-\sqrt{15} < x < \dfrac{1-\sqrt{73}}{2}$, $5 < x < 6$.

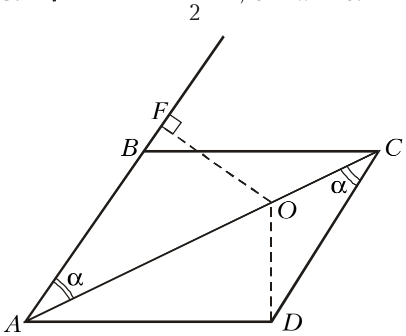

Рис. 9

4. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. *Решение.* Пусть O – центр окружности, R – ее радиус; F – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB; $\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ (рис.9). Тогда

$$OF = OC = OD = R,$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если $AB = CD = x$, S – площадь параллелограмма $ABCD$, то

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot AC\sin\alpha = \sqrt{2},$$

где

$$x = 2\cdot OC\cos\alpha = 2R\cos\alpha,$$

$$AC = AO + OC = \frac{R}{\sin\alpha} + R = 4R.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2} = 2R\cos\alpha\cdot 4R\sin\alpha = \frac{16\sqrt{2}}{9}R^2,$$

откуда

$$R = \frac{3}{4},\ x = \sqrt{2}.$$

Из ΔACD по теореме косинусов

$$AD^2 = 9 + 2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 3,$$

откуда

$$BC = AD = \sqrt{3}.$$

5. $x = 20$, $y = 8$. *Решение.* Умножая первое неравенство на 3 и складывая с третьим, получаем $7y < 61$, откуда $y < 8\frac{5}{7}$. Умножая второе неравенство на -3 и складывая с третьим, получаем $-5y < -32$, откуда $y > 6\frac{2}{5}$. Итак, $y = 7$ или $y = 8$. Подстановка этих значений в исходную систему показывает, что целочисленное решение только одно: – $y = 8$, $x = 20$.

6. $\arccos\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$, $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$, $a\sqrt{\dfrac{11}{6}}$.

Решение. а) Пусть M – середина AC, $\angle DCF = \alpha$, φ – угол между прямыми BC и KE (рис.10). Тогда

$$\angle EKM = \varphi,\ \cos\alpha = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из треугольников KEM, CEM и KEC по теореме косинусов

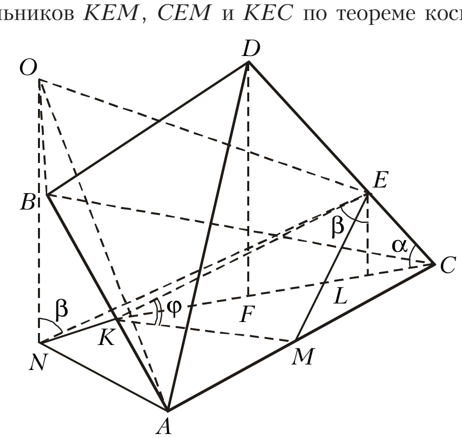

Рис. 10

получаем

$$EM^2 = KE^2 + KM^2 - 2KE\cdot KM\cdot\cos\varphi,$$

$$EM^2 = EC^2 + MC^2 - 2EC\cdot MC\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{36}a^2,$$

$$KE^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{3a^2}{4} - 2\frac{a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{19a^2}{36},$$

откуда следует, что

$$\frac{7a^2}{36} = \frac{19a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi,\ \cos\varphi = \frac{7}{2\sqrt{19}},$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}.$$