Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x - \sin x}{\cos 5x - \sin 3x} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x^2 - |x| - 12}{x + 3} > 0.$$

4. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найдите стороны параллелограмма, если его площадь $S = \sqrt{2}$, а $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{3}$.

5. Найдите все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства $3y - x < 5$, $x + y > 26$, $3x - 2y < 46$.

6. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K – середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F – центр грани ABC. Найдите: а) угол между прямыми BC и KE; б) расстояние между этими прямыми; в) радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

Вариант 2

1. Найдите решения $(x;\ y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(5y - x - 2) - \log_9(x - y)^2 = 1, \\ \log_3\left(1 - \dfrac{2}{y} - 4x\right) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - y < 0$.

2. Решите уравнение

$$2 + \sqrt{3}\sin 2x - |\cos 2x| = 4\sin^2\frac{x}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^2 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geq 3x - 10.$$

4. Медиана AE и биссектриса CD равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через M параллельно AC, пересекает AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите MQ и радиус окружности, описанной около треугольника PQB, если $AC = 4$, а $\angle ACB = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$.

5. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ x^2 + y^2 \geq 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: а) первому неравенству системы; б) первым двум неравенствам системы; в) всем трем неравенствам системы.

6. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2 \cdot ES$, $SF = 5 \cdot DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найдите: а) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α; б) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α; в) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту в точке O закреплена нить длиной l; к другому концу нити привязан небольшой шарик (рис.1). В начальный момент шарик находится в положении равновесия в точке A. Какую минимальную скорость надо сообщить шарику в точке A вдоль наклонной плоскости в горизонтальном направлении, чтобы шарик совершил полный оборот, двигаясь по окружности?

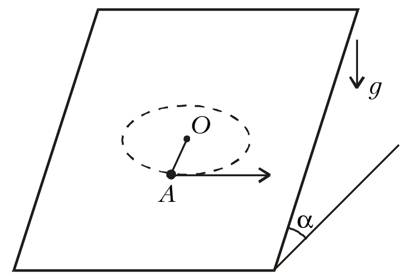

Рис. 1

2. Летним днем перед грозой плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в 1 м^3) равна ρ = 1140 г/м^3 при давлении p = 100 кПа и температуре t = 30 °С. Найдите отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к парциальному давлению воздуха. Принять, что молярные массы воздуха и пара равны $M_в$ = 29 г/моль и $M_п$ = 18 г/моль соответственно; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К).

3. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ = 15 В, резисторов с сопротивлениями R_1 = 10 Ом и R_2 = 30 Ом, замыкают ключ K (рис.2). 1) Найдите ток

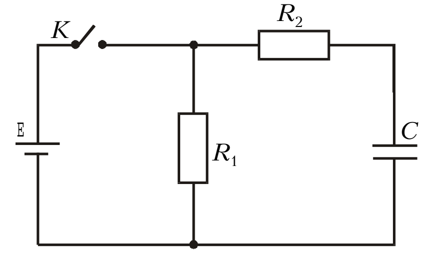

Рис. 2

через резистор R_2 сразу после замыкания ключа. 2) Найдите ток через батарею в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}/3$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка в виде равностороннего треугольника со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого