Узы дружбы в

В мире чисел существует множество всевозможных отношений. Мы сравниваем числа по величине, по принадлежности их к тем или иным классам (четных, простых, удовлетворяющих определенным уравнениям и т.п.). Ряд любопытных отношений связан с собственными делителями натуральных чисел. Напомним, что к *собственным* делителям натурального числа относятся лишь те делители, которые отличны от него самого, например, собственные делители числа 6 – это 1, 2, 3. Назовем число *a приветливым к* числу *b*, если сумма собственных делителей *a* равна числу *b*. Так, число 16 приветливо к числу 15, потому что $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, а 15 уже *не* приветливо к 16, потому что $1 + 3 + 5 = 9 \neq 16$.

На рисунке 1 показана *схема приветливости* некоторой группы чисел. Рассматривать (и рисовать) подобные

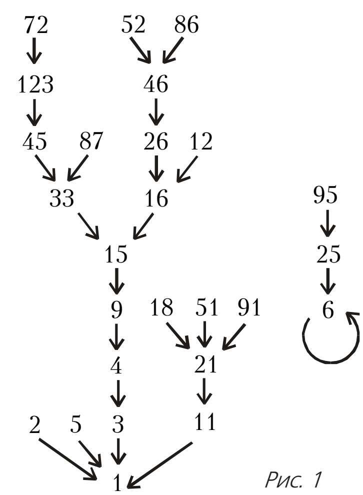

Рис. 1

схемы порой бывает так же интересно и увлекательно, как и рассматривать географические атласы. Каждое число на этой схеме, за исключением 1, приветливо к какому-нибудь другому числу. Числа 2, 5 не вызывают симпатий ни у кого (интересно, имеются ли еще и другие «несимпатичные» числа?), а вот число 6 приветливо к самому себе: $1 + 2 + 3 = 6$. Числа, приветливые к самим себе, в математике получили название *совершенных*. Они цени-

«Среди всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными приложений, чем те, которые состоят в изучении природы числа и исследования делителей... В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям подобного рода... А именно, они не только считали, что отыскание истины похвально само по себе и достойно человеческого познания, но, кроме того, совершенно справедливо полагали, что при этом замечательным образом развивается изобретательность и перед человеческим разумом раскрываются новые возможности решать сложные задачи...»

Леонард Эйлер. О дружественных числах *(1849).*

Арабский математик Сабит ибн Курра (836—901) придумал следующий способ получения дружественных чисел. Если числа p, q и r – простые нечетные числа вида $p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^k - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$, то числа $m = 2^k pq$ и $n = 2^k r$ – дружественные.

При $k = 2$ по рецепту Сабита ибн Курры получаются дружественные числа 220 и 284, при $k = 4$ – пара дружественных чисел 17296 и 18416, а при $k = 7$ – дружественные числа 9363584 и 9437056. Дальнейшие попытки найти этим способом дружественные пары, перебирая значения k от 8 до 20000, к успеху не приводят.

Один из первых способов получения совершенных чисел придумали пифагорейцы. В IX книге евклидовых «Начал» он формулируется так:

«Если от единицы откладывать сколь угодно последовательно пропорциональных чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделается первым (т.е. простым – *Прим.ред.*) числом и вся совокупность, умноженная на последнее число, произведет что-то, то возникающее число будет совершенным». В современной терминологии, число $\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1}\right) \cdot 2^{k-1} = \left(2^k - 1\right) \cdot 2^{k-1}$ является совершенным, если число $2^k - 1$ простое. Этот факт получается из аккуратного подсчета суммы собственных делителей числа $\left(2^k - 1\right) \cdot 2^{k-1}$.

Справедлив и более общий факт: четное число совершенно тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\left(2^k - 1\right) \cdot 2^{k-1}$, где $2^k - 1$ – простое число.

«Работы, посвященные нечетным совершенным числам, напоминают охоту за призраком: никто никогда его не видел, но проведено много остроумных исследований того, как он не может выглядеть»

Вальтер Боро, современный немецкий математик