

Напомним, что  $N$  – общее число игроков, а квадратные скобки служат для обозначения целой части числа.

При доказательстве можно воспользоваться задачей 1. Но не обязательно.

б) Для произвольного  $N \geq 4$  и произвольного натурального  $K \leq [N/2] - 1$  постройте пример, когда число странных равно  $K$ .

Пусть на турнире отсутствуют средние игроки (т.е. не странные, но набравшие столько же очков). Тогда появляются новые ограничения на количество странных и их положение в таблице результатов. (Это выглядит парадоксально: отсутствие одних ограничивает других. Дело, конечно, в том, что игрок бывает странным не сам по себе, а в зависимости от того, как сыграли другие – с ним и между собой.)

**Задача 5.** а) Докажите, что на любом турнире сильные вместе со странными составляют меньше  $2/3$  от общего числа игроков, и что то же верно для слабых вместе со странными.

Если же на турнире нет средних, то сильные и слабые составляют более чем по трети участников турнира, а странные – менее трети. Более точно, если  $N$  имеет вид  $3M$ ,  $3M + 1$  или  $3M + 2$  ( $M$  натуральное), то число странных не превосходит, соответственно,  $M - 2$ ,  $M - 1$ ,  $M$ .

Отсюда вытекает решение задачи о богатырях, с которой мы начали, а также задачи 26).

б) Постройте пример (для произвольного  $N \geq 5$ ), когда на турнире есть странные, нет средних, а число сильных, как и число слабых, равно наименьшему целому, большему  $N/3$ .

### Когда же появляются странные?

Наличие в турнире странных игроков показывает, что его участников трудно упорядочить по силе. В этих условиях естественно ожидать, что будет много совпадающих результатов. Например, в решении задачи 2а) встретилась такая ситуация: в турнирной таблице есть странные игроки, причем заняты лишь первое и последнее места и на одном из них – два игрока. Возникает вопрос: может ли быть странный участник на турнире, где набрали поровну все, кроме одного? Отрицательный ответ вытекает из следующего факта (может быть, уже известного вам):

**Задача 6.** Если в круговом турнире все участники, кроме одного, получили одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл. Докажите это.

**Решение.** Пусть «нестандартный» участник набрал больше очков, чем «стандартные». Результат «среднеарифметического» участника составляет  $(N - 1)/2$ . Недобор «стандартного» участника до этого количества не может быть меньше  $1/2$ , поэтому «стандартные» вместе не добрали не менее чем  $(N - 1)/2$  очков. «Нестандартный» должен на столько же превзойти средний уровень, т.е. он получил не мень-

ше  $N - 1$  очков. Это возможно лишь в случае, когда «нестандартный» у всех выиграл.

Аналогично разбирается случай, когда «нестандартный» набрал меньше, чем «стандартные».

Что же наблюдается в противоположном случае, когда любые два игрока набрали разное количество очков? Если при этом нет ничьих, то участники турнира «выстраиваются в цепочку»: занявший первое место выиграл у всех, занявший второе – у всех, кроме первого, и т.д. (если вам не был известен этот факт, то докажите его в качестве задачи 6'). В таком случае, конечно, странных нет. Однако для их появления требуется не так уж много:

**Задача 7.** а) Пусть в круговом турнире все участники набрали разное количество очков. Постройте пример, когда ровно две ничьих и имеется странный игрок.

Естественно возникает вопрос, возможен ли странный игрок в ситуации, промежуточной между условиями задач 6' и 7а), т.е. при одной ничьей. Ответ отрицательный, причем доказать его гораздо труднее, чем во всех предыдущих случаях. Этой задачей мы и закончим знакомство с турнирными парадоксами:

б) В круговом турнире была только одна ничья. Любые два участника набрали разное количество очков. Докажите, что странных игроков нет.

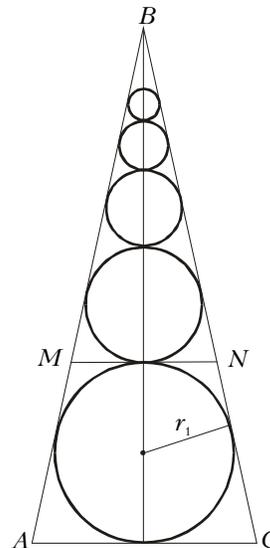
## НАМ ПИШУТ

### Метод размерностей в геометрии

**Задача.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = BC$ ,  $\angle B = 2\alpha$ . Высота, опущенная на основание, равна  $h$ . В треугольник вписана окружность. Вторая окружность касается первой окружности и боковых сторон треугольника. Третья окружность касается второй окружности и боковых сторон треугольника и т.д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех получившихся кругов.

Традиционное решение основано на рассмотрении окружностей, вписанных в подобные треугольники. Сумма площадей всех кругов получается как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поступим по-другому.

Из соображений размерностей площадь всех кругов можно выразить формулой  $S_{(ABC)} = fh^2$ , где  $f$  – некоторый неизвестный безразмерный коэффициент. Для его отыскания проведем отрезок  $MN$ , который касается первой окружности и параллелен основанию треугольника. Очевидно, что для кругов, вписанных в треугольник  $MBN$ , справедлива та же формула для суммы их площадей с заменой, разумеется,



высоты  $h$  на высоту треугольника  $MBN$ :  $S_{(MBN)} = f(h - 2r_1)^2$ , где  $r_1$  – радиус первого круга. Ясно, что площадь всех кругов, вписанных в треугольник  $ABC$ , равна сумме площадей первого круга и всех кругов, вписанных в треугольник  $MBN$ :  $fh^2 = \pi r_1^2 + f(h - 2r_1)^2$ .

Радиус первого круга равен  $r_1 = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ . Получим уравнение относительно неизвестной величины  $f$ ; его решение  $f = \frac{\pi \sin \alpha}{4}$ .

Следовательно, сумма площадей всех кругов, вписанных в треугольник  $ABC$ , равна  $S = \frac{\pi}{4} h^2 \sin \alpha$ .

А. Колодочко