любом случае должна быть выбрана. Уберем эту коробку с бусинкой, а также вторую бусинку того же цвета (из другой коробки). Останутся 18 бусинок, разложенные в 9 коробок. Количество способов выбрать по бусинке из каждой коробки осталось при этом тем же, что и в исходной задаче. Будем продолжать действовать так до тех пор, пока имеются коробки, содержащие всего одну бусинку. Пустых коробок при этом появиться не может, так как это привело бы к противоречию с условием задачи: в этом случае не существовало бы ни одного способа требуемого выбора.

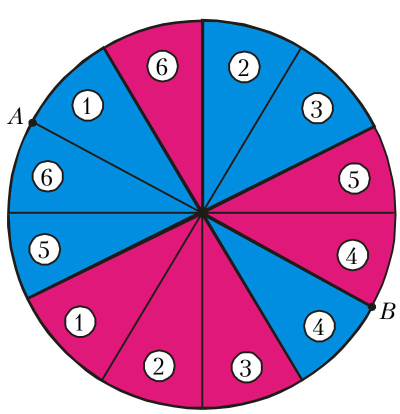
В результате останется $2n$ бусинок, разложенных в n коробок, по две в каждой. Будем выстраивать коробки в «цепочку» так, чтобы соседними были коробки, содержащие бусинки одного цвета (аналогично правилам игры в домино). Это можно делать до тех пор, пока цепочка не «замкнется», т.е. на концах не будут находиться коробки, содержащие бусинки одного цвета.

Все коробки при этом разобьются на несколько цепочек (в частности, если коробка содержит две бусинки одного цвета, то цепочка состоит из нее одной). Ясно, что выбрав одну из двух бусинок в любой из коробок, мы однозначно определяем выбор бусинок из других коробок той же цепочки и никак не ограничиваем выбор бусинок из коробок других цепочек. Поэтому общее количество способов требуемого выбора равно 2^k, где k – количество получившихся цепочек.

А.Гришин, В.Бугаенко

М1684*. *Круг разделен радиусами на $2n$ равных секторов, из которых какие-то n – синие, а остальные n – красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до n. Докажите, что найдется полукруг, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n.*

Нужно доказать, что найдется диаметр AB, разделяющий сразу все пары одинаковых чисел (см. рисунок; здесь $n = 6$). Условимся называть красными числа, стоящие в красных секторах, и синими – стоящие в синих секторах. Расстоянием между двумя числами a и b назовем количество чисел, расположенных на меньшей дуге между числами a и b. Числа, расставленные по окружности, разбиваются на пары равных. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем любую из них). Пусть, для определенности, выбранная пара – красная единица и синяя единица, причем меньшая дуга ω между ними идет от красной единицы к синей против часовой стрелки. На дуге ω либо нет чисел (т.е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе красное и синее



числа n были бы на расстоянии меньшем, чем расстояние между единицами. Пусть все числа на этой дуге (если они есть) – синие (случай, когда они красные, аналогичен). Проведем диаметр, отделяющий синюю единицу от числа, следующего за ним по часовой стрелке; покажем, что этот диаметр искомый. Действительно, рассмотрим полукруг, содержащий синюю единицу. Прочтем синие числа, записанные в этом полукруге, начиная с единицы, против часовой стрелки – это числа 1, 2, ..., l (l – некоторое число). Прочтем теперь красные числа. Поскольку на дуге ω нет красных чисел, это будут числа n, $n-1$, ..., $n-m$ (m – некоторое число). Так как всего в полукруге n чисел, то в нем записаны все числа от 1 до n по одному разу.

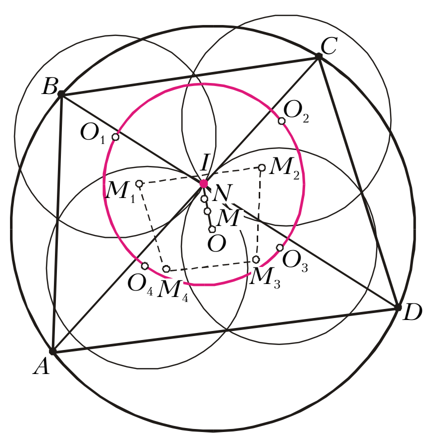
Мы разобрали ситуацию такую, когда пара разноцветных чисел с наименьшим расстоянием представлена единицами. Если таковые числа не единицы, то можно устроить циклическую перенумерацию так, чтобы они стали единицами.

В.Произволов

М1685. *В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности, проведенные через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.*

Рассматриваемые в задаче окружности называются окружностями Эйлера, или окружностями девяти точек, так как они проходят через девять замечательных точек: середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой пересечения его высот.

Обозначим центры окружностей Эйлера треугольников ABC, BCD, CDA, DAB соответственно O_1, O_2, O_3, O_4, точки пересечения медиан этих треугольников – M_1, M_2, M_3, M_4, центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, обозначим O (см. рисунок).



Так как окружности Эйлера проходят через середины сторон соответствующих треугольников, то они гомотетичны описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности с коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$ и центрами гомотетии соответственно в точках M_1, M_2, M_3, M_4. Но тогда O_1, O_2, O_3, O_4 можно рассматривать как точки, гомотетичные соответственно точкам M_1, M_2, M_3, M_4, с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии