Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1706» или «Ф1713». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1706 и М1708 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде этого года.

Задачи М1706—М1710, Ф1713—Ф1717

М1706. Пусть AL и BM – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.

Е.Сопкина

М1707*. Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n \times n$ клеток, разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже,

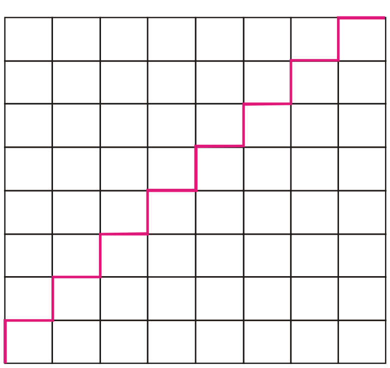

Рис.1

либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис.1). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.

В.Произволов

М1708. Играют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа 100!, отличные от 1 (без повторений). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на доске окажутся в совокупности взаимно просты.

Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?

Д.Карпов

М1709. Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади

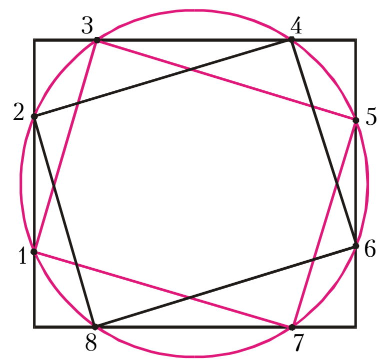

Рис.2

четырехугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис.2).

В.Произволов

М1710*. Пусть x, y, z, p, q, r – положительные числа такие, что $p+q+r=1$, $x^p y^q z^r = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy} \geq \frac{1}{2}.$$

С.Калинин