ми словами, обратиться к комбинаторике.

Перестановка с неподвижными элементами – это перестановка, имеющая хотя бы один неподвижный элемент. Некоторые читатели, вероятно, помнят, что, когда возникает выражение «хотя бы один», часто удобно переходить к дополнительному множеству, где таких элементов нет ни одного. Тем более, что и принцип умножения сам в руки просится.

Итак, подсчитываем с помощью этого принципа число «ненужных» (т.е. не имеющих неподвижных элементов) перестановок. На первой позиции кортежа может стоять любое число, за исключением 1, т.е. $n_1 = m - 1$. Далее, на второй позиции может стоять любое число, кроме 2 и числа, стоящего на первой позиции; стало быть, $n_2 = m - 2$. Продолжая это рассуждение, доходим до $n_{m-1} = 1$ и, наконец, до $n_m = 0$. Мы пришли к неожиданному результату – оказывается, перестановок без неподвижных элементов не существует! А то, что примеры таких перестановок у нас перед глазами – это, повидимому, не более чем мираж...

В чем дело, читатель? Ваша версия? Если таковой нет, подумайте.

Конечно, дело в применении (вернее, в «применении») принципа умножения. Вернемся к нашим рассуждениям. Первый шаг безупречен: $n_1 = m - 1$. Но вот второй... Мы молчаливо предположили, что число, стоящее на первой позиции, и 2 – это два различных числа. Но ведь перестановка может начинаться с 2, тогда для второй позиции имеется не $m - 2$, а $m - 1$ возможностей. Итак, оказывается, наше множество не имеет простой структуры (когда число возможностей не зависит от того, что стоит на предшествующих позициях). Для применимости принципа умножения этот факт является роковым.

Раз не удалось взять крепость кавалерийским наскоком, придется пустить в ход тяжелую артиллерию – формулу включений и исключений.

Пусть A_k – множество перестановок с неподвижным элементом k $(1 \le k \le m)$. Требуется найти величину $N_m = \left|A_1 \cup \ldots \cup A_m\right|$ (мы вернулись к «нужным» перестановкам). Заметим, что для любых k $(1 \le k \le m)$ различных индексов i_1, i_2, ..., i_k

$$\left|A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right| = (m-k)!.$$

В самом деле, пересечение $A_{i_1} A_{i_k}$ – это множество перестановок, в которых числа i_1, ..., i_k закреплены на своих местах, а остальные $m - k$ чисел из 1, 2, ..., m могут быть расположены в произвольном порядке на $m - k$ свободных местах (попадут ли какие-либо из них на свои места, не имеет отношения к делу). Итак, искомое число есть количество перестановок из $m - k$, т.е. $(m - k)!$.

Теперь формула (18) резко упрощается. Поскольку число слагаемых в сумме, где участвуют пересечения вида $A_{i_1} \ldots A_{i_k}$, равно

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

и каждое слагаемое в этой сумме равно $(m - k)!$, получаем

$$N_m = \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right| = \\ = \frac{m!}{1!} - \frac{m!}{2!} + \frac{m!}{3!} - \ldots + (-1)^{m+1}.$$

Например, при $m = 6$ число перестановок с неподвижными элементами есть

$$N_6 = 720 - 360 + 120 - \\ - 30 + 6 - 1 = 455.$$

Еще интереснее вопрос о том, как ведет себя доля таких перестановок (среди всех $m!$ перестановок)

$$\frac{N_m}{m!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}. \quad (19)$$

С ростом m эта доля приближается к бесконечной сумме

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \quad (20)$$

«Бесконечность» здесь относится лишь к числу слагаемых, но не к самой величине суммы, которая имеет вполне определенное и конечное значение, являющееся пределом сумм (19) при $m \to \infty$. Ситуация здесь вполне аналогична суммированию убывающей геометрической прогрессии. Математики в таких случаях говорят, что *ряд* (20) *сходится*. С помощью разных методов удалось, помимо суммы членов убывающей геометрической прогрессии, найти суммы огромного числа других сходящихся рядов. Доказано, в частности, что сумма ряда (20) есть

$$1 - \frac{1}{e} = 0,6321\ldots,$$

где $e(= 2,718\ldots)$ – основание натуральных логарифмов.

Итак, с ростом m доля перестановок с неподвижными элементами стремится не к 0 или 1 (как можно было бы предположить), а к довольно загадочной величине $1 - e^{-1}$.

После этого красивого результата стоит, пожалуй, пересмотреть наш взгляд на формулу (18). Да, конечно, простые, короткие формулы приятнее для глаза. Но ведь бывает и так – и мы только что это видели, – что громоздкая с виду формула дает кратчайший путь к решению. А простые формулы либо вообще не годятся, либо приводят к длинным, громоздким способам решения задачи.

Так что, может быть, формула (18) вовсе не так уж уродлива? И даже совсем наоборот?

Наука велика, а жизнь коротка

Мы обсудили некоторые простейшие задачи комбинаторики. Можно назвать это введением в комбинаторику, дающим первое представление о предмете. Очень многое, конечно, пришлось оставить за бортом.

Не коснулись мы, например, так называемого метода производящих функций, где уже не комбинаторика помогает алгебре, а, наоборот, алгебра и анализ помогают комбинаторике (впрочем, разобраться, кто кому «помогает», не всегда просто, лучше говорить о взаимодействии различных областей математики). Хотелось бы поговорить о приложениях комбинаторики в теории вероятностей, затронуть интереснейшие приложения в физике (периодическая таблица Менделеева, второе начало термодинамики), обсудить роль комбинаторики в планировании эксперимента, в кодировании, рассмотреть комбинаторную природу генетического кода... Увы, нельзя объять необъятное, как отметил знаменитый Козьма Прутков. И еще до него древние высказывались в том смысле, что, дескать, ars longa, vita brevis. Поскольку «латынь из моды вышла ныне», даем вольный перевод: наука велика, а жизнь коротка.