динения и пересечения – например, независимость их от порядка A_1, … …, A_m, а также свойства типа

$$AA = A,$$

$$A(B \cup C \cup \ldots \cup D) = AB \cup AC \cup \ldots \cup AD.$$

(Принимается, что пересечение связывает сильнее, чем объединение, т.е., например, $AB \cup AC = (AB) \cup (AC)$.)

Теперь мы можем так записать принцип сложения: если множества A_1, … A_m попарно не пересекаются (т.е. $|A_i A_j| = 0$ при всех $i \neq j$, $1 \leq i$, $j \leq m$), то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i|. \quad (16)$$

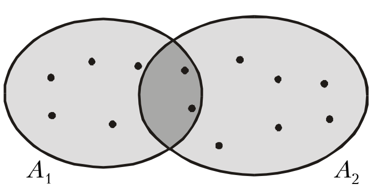
Конечно, этот факт очевиден, как его ни записывай. Но попарно пересекающиеся множества – это очень частный (и очень простой) случай. Можно ли получить аналог формулы (16) для общего случая? Да, и в нескольких формах. Нас будет особо интересовать одна из них (не использующая дополнений к A_1, … …, A_m).

Слабонервных просят не читать (формула включений и исключений)

Случай $m = 2$, впрочем, рекомендуется всем, даже слабонервным. Действительно, при $m = 2$ формула, о которой идет речь, имеет вполне симпатичный вид

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 - A_2|. \quad (17)$$

Ее и доказывать-то не надо, достаточно взглянуть на рисунок:



$|A_1 \cup A_2|$ – количество точек (элементов) во всей заштрихованной области. Складывая $|A_1|$ и $|A_2|$, мы дважды засчитываем точки из области с двойной штриховкой, т.е. из $A_1 A_2$. Поэтому вычитание $|A_1 A_2|$ все ставит на свои места.

Итак, элементы $A_1 A_2$ сначала «включаются» в сумму избыточным образом, затем это исправляется соответствующим «исключением». Отсюда и название формулы. В общем случае она выглядит довольно устрашающе, и мы прелагаем ее лишь для читателей не робкого десятка:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i A_j A_k| - \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 A_2 \ldots A_m| \quad (18)$$

(все индексы суммирования меняются между 1 и m).

При $m = 2$ получается, конечно, (17), где в правой части всего 3 слагаемых. Сколько же вообще слагаемых (того или иного знака) в «сумме сумм», стоящей в правой части? Столько же, сколько непустых подмножеств у m-множества, т.е. $2^m - 1$. Если, скажем, $m = 30$, то слагаемых уже больше миллиарда. А ведь чтобы найти каждое слагаемое, надо определить число элементов, общих для какого-то набора из множеств A_1, …, A_m. Неужели столь громоздкая уродливая формула может быть полезной?

Вопрос, понятно, риторический. Для чего же еще мы стали бы ее приводить – ради красоты, что ли?

В задачниках часто можно найти примеры применения формулы (18) наподобие следующего.

Задача 14. *Ученики некоторого класса занимаются только тремя видами спорта – бегом, плаванием и теннисом. Бегом всего занимается 10 человек, плаванием – 13, теннисом – 11, бегом и плаванием – 4, бегом и теннисом – 5, плаванием и теннисом – 6, бегом, плаванием и теннисом – 2. Сколько учеников данного класса занимается спортом?*

Для решения применим формулу (18). Если множество учеников, занимающихся бегом, обозначить через A_1, плаванием – через A_2 и теннисом – через A_3, то искомая величина есть

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 A_2| - |A_1 A_3| - |A_2 A_3| + |A_1 A_2 A_3| = 10 + 13 + 11 - 4 - 5 - 6 + 2 = 21.$$

Все правильно, но в полезности формулы (18) подобные примеры не очень убеждают. Как-то трудно поверить, что лица, обладающие столь детальной информацией о занятости учеников всевозможными комбинациями видов спорта, почему-то не знают, сколько же учеников занимается спортом, и обращаются за помощью к нам – т.е. к формуле включений и исключений. Намного более интересное приложение будет рассмотрено в следующем разделе.

Мы увлеклись обсуждением формулы (18) и едва не забыли про доказательство. С применением индукции оно оказывается довольно простым. Пусть формула уже доказана для $m' = 2$ и $m' = m - 1$. Полагая $A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1} = B$, находим

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = |B \cup A_m| =$$

$$= |B| + |A_m| - |BA_m| =$$

$$= |B| + |A_m| - A_1 A_m \cup \ldots \cup A_{m-1} A_m =$$

$$= \sum_{i<m} |A_i| + |A_m| - \sum_{i<j<m} |A_i A_j| - \sum_{i<m} |A_i A_m| + \ldots =$$

$$= \ldots \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i A_j| + \ldots$$

Полезная все-таки вещь – индукция!

Число перестановок, имеющих неподвижные элементы

Рассмотрим $3! = 6$ возможных перестановок чисел 1, 2, 3:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

В первой из них все три числа стоят на своих местах («неподвижны»). Во второй есть один такой элемент (1); также по одному неподвижному элементу имеют третья (3) и шестая (2). В четвертой и пятой перестановках неподвижных элементов нет.

Рассмотрим вопрос: сколько из $m!$ перестановок чисел 1, 2, …, m имеют неподвижные элементы?

Для $m = 3$ ответ, как мы видели, 4 (для $m = 2$ такая перестановка, очевидно, одна). Вручную нетрудно решить задачу перебором для случая $m = 4$; при $m = 5$ возникает мысль о применении компьютера. В самом деле, даже при m порядка 10 – 12 (когда перебор вручную нереален) компьютерный перебор не занимает много времени. Но уже при $m = 20$ перебор 20! перестановок недоступен для компьютеров. Надо, стало быть, искать какие-то более действенные средства подсчета. Други-