а в 6) – величина

$$\frac{1}{2!0!0!}+\frac{1}{0!2!0!}+\frac{1}{0!0!2!}+\frac{1}{1!1!0!}+$$
$$+\frac{1}{1!0!1!}+\frac{1}{0!1!1!}(=4,5).$$

Как видим, в случаях 5) , 6) легко обойтись и без Σ. Но представьте себе, что в 6), например, 2 заменено на 200. Запись с Σ останется столь же короткой, а о «явной» записи (без Σ) даже думать не хочется.

При многоиндексном суммировании довольно часто встречаются «кратные» Σ (Σ под знаком Σ); мы их применять не будем.

Комбинаторика помогает алгебре

Все знают формулу

$$\left(x_1+x_2\right)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2.$$

Эрудиты помнят также выражения для куба суммы двух слагаемых и для квадрата суммы произвольного числа слагаемых. Но даже из эрудитов мало кто подозревает, что все это – одна и та же формула, вернее, ее частные случаи. Вот она, эта формула:

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)^n=$$
$$=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\ge 0\\ k_1+\ldots+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}. \quad (9)$$

Некоторая сложность выражения является, так сказать, платой за универсальность – ведь формула верна для любых натуральных m и n. Суммирование в (9) ведется по всем целочисленным кортежам, удовлетворяющим указанным условиям.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что при $n = 2$ (9) переходит в обычную формулу для квадрата суммы. Такая проверка, конечно, не заменяет обоснования, которым мы теперь и займемся.

Тот факт, что правая часть (9) является суммой членов вида

$$cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}\,(k_1,\ldots,k_m\ge 0,$$
$$k_1+\ldots+k_m=n),$$

ясен. Все дело в том, чтобы найти коэффициент c (зависящий, конечно, от $k_1, \ldots, k_m$).

Чтобы не утомлять читателя суетой с индексами, затемняющей суть дела, мы, как и ранее, ограничимся частным случаем. Основная идея очевидным образом переносится на общий случай.

Примем для определенности $m=3$, $n = 7$ и найдем коэффициент при $x^2y^2z^3$ в выражении

$$(x+y+z)^7, \qquad (10)$$

или, точнее, в выражении, которое получится после возведения в степень и приведения подобных членов.

Забудем временно о показателях степени и запишем (10) в виде произведения 7 скобок

$$(x+y+z)(x+y+z)\ldots(x+y+z). (11)$$

Выполняя почленное умножение без изменения порядка сомножителей, мы будем получать произведения, выглядящие как слова. Скажем, если в каждой скобке берется первое слагаемое, получим $xxxxxxx$. Нас, однако, сейчас интересуют произведения, куда x, y и z входят сомножителями 2, 2 и 3 раза соответственно. Например, произведение

$$yxxzzzy,$$

которое получается, если в первой скобке берется второе слагаемое, во второй и третьей – первое и т.д. Сколько будет слагаемых этого типа?

Знакомая ситуация, не правда ли? Помните, мы переставляли буквы слова КОЛОКОЛ и нашли, что таким образом можно получить $\frac{7!}{2!2!3!}=210$ различных слов (перестановки с повторениями)? Теперь у нас вместо К, Л, О буквы x, y, z. Разумеется, на ответ это не влияет. Итак, соответствующее слагаемое имеет вид

$$\frac{7!}{2!2!3!}x^2y^2z^3=210x^2y^2z^3.$$

Мы получили (для $m=3$, $n=7$) одно из слагаемых в правой части (9). Все остальные получаются точно так же.

Да, кстати, а сколько всего этих слагаемых? Конечно же, слагаемых ровно столько, сколько решений в целых числах $k_i\ge 0$ у нашего любимого уравнения $k_1+\ldots+k_m=n$, т.е. $\binom{n+m-1}{m-1}$. В данном случае получится $\binom{9}{2}=36$ слагаемых.

Кому-то наши скоростные способы «возведения в степень без возведения в степень» могут показаться сомнительными. Что ж, скептики могут, например, честно перемножить скобки в (11), привести подобные и непосредственно проверить, сколько получится слагаемых и каков окажется коэффициент при $x^2y^2z^3$.

По-человечески жаль их, конечно. Все-таки седьмая степень. Почти наверняка где-то собьются, надо будет искать ошибку, исправлять… чтобы после всех трудов «причалить», наконец, к числам 36, 210, которые мы нашли, можно сказать, устно.

Любимая формула Коровьева (бином Ньютона)

«Подумаешь, бином Ньютона», – говаривал небезызвестный Коровьев, вице-премьер еще более небезызвестного Воланда. Что, собственно, он имел в виду?

Смысл ясен – это, мол, не проблема. Но все-таки: что за бином такой?

А это просто частный случай формулы (9) при $m = 2$:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k. \quad (12)$$

Кстати, бином в переводе значит двучлен (а речь здесь идет именно о степени двучлена). Теперь читателю ясно, почему числа сочетаний обычно называют биномиальными коэффициентами.

Для примера возьмем, скажем, $n = 4$:

$$(x+y)^4=\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3y+$$
$$+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}xy^3+\binom{4}{4}y^4=$$
$$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4. (13)$$

Разумеется, для столь малого $n(=4)$ тот же результат легко получить простым возведением в степень – например, возведя в квадрат $x^2+2xy+y^2$. Суть биномиальной формулы (12) именно в том, что она дает ответ непосредственно, без обращения к низшим степеням. То же относится и к более общей формуле (9) (ее иногда называют полиномиальной).

Следующая таблица известна как арифметический треугольник, или

Иллюстрация Ю.Ващенко