Что такое комбинаторика

А.ЛЕВИН

Что такое счастье

Вернемся к уравнению (6) $\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m\right)$. Уместно посмотреть, что произойдет, если игнорировать порядок слагаемых. Для определенности будем считать слагаемые положительными и рассмотрим следующую задачу.

Задача 13. *Сколькими способами можно разбить число m на $n\,(\le m)$ натуральных слагаемых, если разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются тождественными?*

Решили? Нет? Это и неудивительно: задача не решается в привычном смысле. Хотелось бы, чтобы, как и ранее, ответ давался в виде явно выписываемой функции $f(m, n)$. Но на этот раз сколько-нибудь «явно» выразить ответ через параметры задачи m, n не удается.

Разумеется, для любых конкретных чисел m, n мы в принципе можем вычислить численное значение $f(m, n)$ – хотя бы перебором, на худой конец. Например, легко убедиться, что $f(8, 3) = 5$, ибо существует 5 способов разбиения (с точностью до порядка) числа 8 на 3 слагаемых:

$$1 + 1 + 6,\ 1 + 2 + 5,\ 2 + 2 + 4,$$
$$1 + 3 + 4,\ 2 + 3 + 3.$$

С помощью компьютера можно быстро вычислять и такие значения, как, например, $f(100, 10)$. Только перебором не стоит заниматься, существует куда более эффективный алгоритм. Полезно заметить, что отождествление разбиений, отличающихся порядком, можно заменить требованием упорядоченности x_i, скажем, в неубывающем порядке:

$$(1 \le)x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n. \qquad (8)$$

Таким образом, $f(m, n)$ есть число решений в натуральных числах системы, состоящий из уравнения (6) и неравенств (8). Такая переформулировка удобна во многих отношениях; она может помочь и при выборе эффективного алгоритма вычисления f. Разработка и программная реализация алгоритма – а заодно и вычисление $f(100, 10)$ – предоставляется читателю в качестве полезного и интересного самостоятельного задания. Заметим лишь, что алгоритм будет носить рекуррентный характер – от меньших значений параметров к бóльшим.

Относится ли данное задание к комбинаторике или к информатике? К тому и к другому. Можно назвать это компьютерной комбинаторикой. Жаль, что в русском языке пока нет слова «алгоритмика». Оно было бы кстати. (Впрочем, скорее всего, оно появится в недалеком будущем).

Разумеется, для вычислений с $n!$ при заданном n также можно написать программу (причем число операций будет расти вместе с n). Почему же мы относим выражения $n!$, $\binom{n}{m}$ и т.п. к «явным» аналитическим выражениям в отличие от $f(m, n)$? Обозначения здесь ни при чем: ведь при желании можно и для $f(m, n)$ придумать какое-нибудь специальное обозначение (скажем, $m?n$). Суть в том, что особая простота «факториального» алгоритма и в самом деле позволяет обращаться с факториалами как с аналитическими выражениями – подставлять в формулы и проводить преобразования. Об этом наглядно свидетельствует, например, приводимая ниже выкладка (15). С произвольными программами такое, разумеется, невозможно.

При первом знакомстве с комбинаторикой «нерешабельные» задачи обычно не затрагиваются. Мы нарушили эту традицию, чтобы читатель с самого начала имел правильное представление о предмете. Он должен почувствовать, что наличие «явного» ответа для комбинаторной задачи с параметрами (т.е. для задачи, в формулировку которой входят буквы) – это удача, счастливый случай, который надо ценить. Такие случаи осуществляются в комбинаторике довольно часто. Но, к сожалению, не всегда.

Знак Σ

Те, кто знаком с этим обозначением, могут данный пункт пропустить. Они ведь и так знают, что эта прописная греческая буква (сигма) является общепринятым символом суммирования. Обычно суммирование идет по одному или нескольким целочисленным индексам. Если индекс пробегает значения «от и до», то нижняя и верхняя границы указываются, соответственно, внизу и вверху; в более сложных случаях область изменения индексов обычно указывается под буквой Σ. Вот несколько примеров:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} a_k;\ 2)\ \sum_{k} a_k;\ 3)\ \sum_{k=1}^{n} a_k = m;$$

$$4)\ \sum_{j=0}^{\infty} aq^j = \frac{a}{1-q};\ 5)\ \sum_{1\le i<j\le 4} x_{i,j};$$

$$6)\ \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \ge 0 \\ n_1+n_2+n_3=2}} \frac{1}{n_1!\,n_2!\,n_3!}.$$

В случае 1) записана сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (здесь Σ легко заменить многоточием, но так дело обстоит не всегда). В 2) указан индекс суммирования k, но не его границы; они, следовательно, должны быть ясны из контекста. В 3) читатель узнает уже знакомое нам «уравнение дележа» (6), а в 4) – формулу для суммы членов геометрической прогрессии (при $|q| < 1$); здесь число слагаемых, очевидно, бесконечно. В 5) записано выражение

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34},$$

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.