Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1696» или «Ф1703». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1696, М1697, М1699, М1701, М1702 и М1704 предлагались на XXV Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1703—Ф1712 предлагались на финальном туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1696—М1705, Ф1703—Ф1712

М1696. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

Д.Карпов

М1697. Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$?

А.Голованов

М1698. На сторонах треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 (рис.1). При этом известно, что

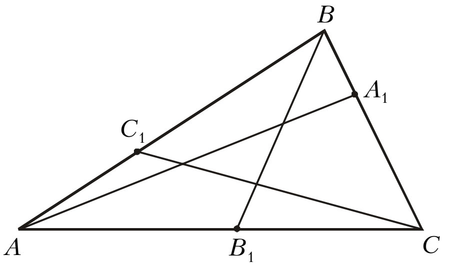

Рис.1

$AA_1 \le 1$, $BB_1 \le 1$ и $CC_1 \le 1$. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $1/\sqrt{3}$.

В.Сендеров

М1699. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\left\{\sqrt{1}\right\}+\left\{\sqrt{2}\right\}+\ldots+\left\{\sqrt{n^2}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

(Здесь $\{k\}$ – дробная часть числа k.)

А.Храбров

М1700*. На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, …, $2n$. Блоха начинает прыгать из точки 1 и через $2n$ прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна $n(2n-1)$. Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна n.

В.Произволов

М1701. Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2+y^3 \ge x^3+y^4$. Докажите, что $x^3+y^3 \le 2$.

С.Злобин

М1702*. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.

В.Дольников

М1703. Для чисел a, b и c нашлись два неравных натуральных числа m и n такие, что $a^m+b^m+c^m=0$ и $a^n+b^n+c^n=0$. Докажите, что $abc=0$.

В.Произволов, В.Сендеров

М1704*. В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов (здесь $[k]$ – целая часть числа k).

С.Токарев

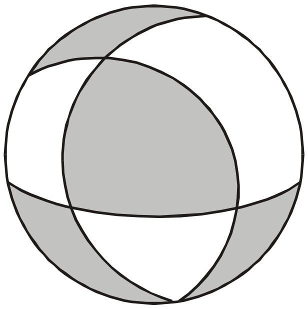

Рис.2

М1705. Через точку внутри сферы проведены три попарно перпендикулярные плоскости, которые рассекли сферу на 8 криволинейных треугольников. Эти треугольники закрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета (рис.2). Докажите, что площадь черной части сферы равна площади ее белой части.

В.Произволов

Ф1703. В компьютерной игре все движется в одной плоскости. Меткий стрелок должен поразить двух злодеев одной пулей. Злодеи двигаются с одинаковыми постоянными скоростями v параллельно друг другу, находясь на расстоянии d один от другого, как показано на рисунке 3. Соединяющая их прямая перпендикулярна направлению скорости v. В данный момент стрелок находится на продолжении этой прямой – на расстоянии L от ближнего злодея. Пуля после выстрела летит по прямой со скоростью $3v$. Пронзая злодея, пуля не меняет ни направления движения, ни величины своей скорости. В какой момент нужно стрелять и под каким углом к направлению движения злодеев нужно выпустить пулю? На сколько дольше ближнего проживет дальний злодей?

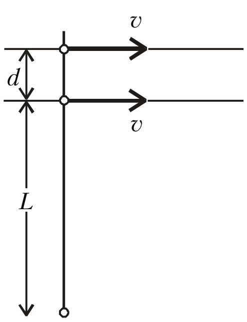

Рис.3

Я.Злодеев

Ф1704. По прямому горизонтальному стержню может скользить без трения бусинка массой M (рис.4). К бусинке привязана легкая нерастяжимая нитка длиной L. Нитку мы тянем за свободный конец так, что скорость этого конца все время направлена вдоль нити и равна по величине v_0. С какой силой нужно тянуть в тот момент, когда нить направлена под углом α к стержню? Нить все время находится в горизонтальной плоскости.

А.Зильберман

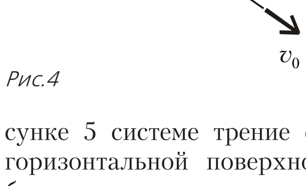

Рис.4

Ф1705. В показанной на рисунке 5 системе трение есть между большим телом и горизонтальной поверхностью стола, а также между большим телом и верхним грузом. Обозначим коэффициент трения наверху μ_1, а внизу μ_2. При каких значениях коэффициентов трения большое тело может оставаться неподвижным?

Р.Александров

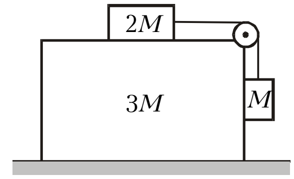

Рис.5

Ф1706. В тонкостенный стакан налили 200 г воды и при помощи опущенного в воду нагревателя постоянной мощности 50 Вт стараются вскипятить воду. Ничего не получается – вода никак не нагревается выше 60 °С. Выключим нагреватель и накроем стакан листком бумаги – вода при этом остынет от 60 °С до 59 °С за 20 секунд. Если бы мы не накрывали стакан листком бумаги, а вместо этого поставили его на теплоизолирующую пробковую подставку, то вода в стакане остыла бы от 60 °С до 59 °С за 30 секунд. Повторим теперь нагревание, но стакан установим на подставку и накроем его листком бумаги. Сколько времени займет в этом случае нагрев воды от 59 °С до 60 °С?

А.Простов

Ф1707. Вертикальный цилиндрический сосуд содержит две порции газа, отделенные друг от друга и от окружающего пространства двумя одинаковыми массивными поршнями массой M каждый (рис.6). В верхней части сосуда находится кислород, в нижней – гелий. Вначале объемы порций одинаковы и расстояние между поршнями составляет H. Нижнюю часть газа медленно нагревают. Какое количество теплоты нужно сообщить гелию в нижней части сосуда, чтобы увеличить его объем в два раза? Каким станет расстояние между поршнями через большой интервал времени – когда температуры порций газа снова сравняются? Теплоемкостью стенок и поршней пренебречь. Снаружи воздух откачан, теплоотдача в окружающее пространство пренебрежимо мала. Теплопроводность поршня, разделяющего порции газа, достаточно мала – за время нагрева тепло в верхнюю полость практически не поступает.

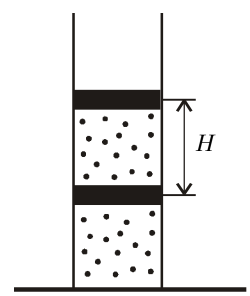

Рис.6

З.Рафаилов

Ф1708. Плоский конденсатор емкостью C составлен из двух больших проводящих пластин, каждая из которых сделана двухслойной – из соединенных друг с другом листов тонкой фольги. Пластины несут одноименные заряды Q и $2Q$. Наружный слой фольги пластины с большим зарядом аккуратно отсоединяют, относят в сторону параллельно другим пластинам и приносят на другое место – третьим слоем снаружи к пластине с зарядом Q. При этом не допускают электрического контакта с этой пластиной – оставляют очень узкий зазор. Какую работу необходимо при этом совершить? Все действия мы производим издали, стараясь не влиять на распределение зарядов пластин.

З.Рафаилов

Ф1709. Два одинаковых вольтметра соединены последовательно и подключены к батарейке (рис.7). Параллель-

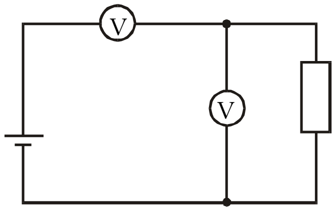

Рис.7

но одному из вольтметров подключают резистор, при этом показания вольтметров составляют 1,4 В и 3,1 В. Отключим теперь один из вольтметров. Что будет показывать оставшийся прибор? Напряжение батарейки можно считать неизменным.

Р.Схемов

Ф1710. В приведенной на рисунке 8 схеме использованы одинаковые вольтметры. Сопротивления двух резисторов одинаковы и равны каждый по R, двух других – по $3R$. Показания приборов составляют 2 мА, 3 В и 0,5 В. Найдите по этим данным величину R.

Р.Схемов

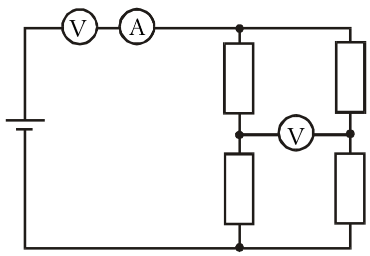

Рис.8

Ф1711. Резистор сопротивлением 100 Ом подключен к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (идеальный диод имеет нулевое сопротивление при пропускании через него тока одной полярности и бесконечное сопротивление при попытке пропустить ток другой полярности). Найдите среднюю мощность, выделяющуюся в резисторе в виде тепла. Во сколько раз изменится эта мощность при подключении параллельно резистору конденсатора емкостью 1 мкФ? А при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ?

А.Теплов

Ф1712. Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления n = 1,5 и имеет диаметр D = 5 см. Радиус выпуклой сферической поверхности R = 5 см. На плоскую поверхность линзы вдоль ее главной оптической оси падает широкий параллельный пучок лучей. Определите размер пятна на экране, расположенном за линзой перпендикулярно падающему пучку. Положение экрана было выбрано по минимальному размеру светлого пятна при узком (ограниченном диафрагмой) пучке лучей вдоль главной оптической оси.

А.Стеклов