ОЛИМПИАДЫ

XXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

Зональный этап

По традиции, зональный (четвертый) этап математической олимпиады 1998/99 учебного года проходил в дни весенних школьных каникул. В этом году олимпиаду принимали Иваново, Курск, Пермь и Барнаул. В олимпиаде участвовали около 350 учащихся 8, 9, 10 и 11 классов – победителей областных олимпиад. Соревнования проводились в два дня. В каждый из этих дней участникам было предложено решить по четыре задачи в течение четырех часов.

По просьбе членов жюри олимпиады школьники каждой параллели назвали лучшие с их точки зрения задачи. Таковыми стали задачи: 7 для 8 класса («домино»), 4 для 9 и 10 классов («лабиринт»), 3 для 11 класса («болтуны и молчуны») и 4 для 11 класса («большие грани»).

Задачи

8 класс

1. Отец с двумя сыновьями отправились навестить бабушку, которая живет в 33 км от города. У отца есть мотороллер, скорость которого 25 км/ч, а с пассажиром – 20 км/ч (двух пассажиров на мотороллере перевозить нельзя). Каждый из братьев идет по дороге со скоростью 5 км/ч. Докажите, что все трое доберутся до бабушки за 3 часа.

2. К натуральному числу A приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A. Найдите A.

И.Акулич

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC, CA. Определите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC.

А.Шаповалов

4. Имеется 40 газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k, а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах?

И.Акулич

5. Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из 2 чисел и B из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A.

Н.Агаханов

6. Дан нетупоугольный треугольник ABC. Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой AB. Докажите, что если точки A_1, B и C_1 лежат на одной прямой и $C_1B = 2A_1B$, то угол CA_1B – прямой.

Н.Агаханов

7. В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д.Храмцов

8. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3\times3\times3$?

А.Шаповалов

9 класс

1. По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \geq 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого их них. Найдите наименьшее возможное значение N.

Д.Кузнецов

2. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E, что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F – середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности.

С.Берлов

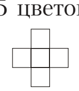
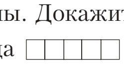
3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z$, то для натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k.$$

С.Злобин

4. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке 1×1 которого нарисована одна из четырех стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки – выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90° по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

М.Антонов

5. Все клетки клетчатой плоскости окрашены в 5 цветов так, что в любой фигуре вида  все цвета различны. Докажите, что в любой фигуре вида  все цвета различны.

С.Берлов

6. См. задачу 7 для 8 класса.

7. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз. Например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

8. В треугольнике ABC ($AB > BC$) K и M – середины сторон AB и AC, O – точка пересечения биссектрис. Пусть P – точка пересечения прямых KM и CO, а точка Q такова, что $QP \perp KM$ и $QM \parallel BO$. Докажите, что $QO \perp AC$.

М.Сонкин

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

П.Кожевников

3. В пространстве даны n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы $n - 3$ точки в пространстве ни взять, найдется плоскость из проведенных, не содержащая ни одной из этих $n - 3$ точек.

В.Дольников, С.Игонин

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Существуют ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы, составленные из 9 из них, – точные квадраты?

Р.Садыков, Е.Черепанов

6. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Пусть K – точка на окружности, диаметрально противоположная точке C_1, D – точка пересечения прямых B_1C_1 и A_1K. Докажите, что $CD = CB_1$.

М.Евдокимов

7. Каждый голосующий на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n + 1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

В.Дольников

8. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдется пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

С.Берлов

11 класс

1. О функции $f(x)$, заданной на всей вещественной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой.

А.Голованов

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

С.Берлов

4. Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что *больших* граней не больше 6.

М.Евдокимов

5. Существуют ли действительные числа a, b и c такие, что при всех действительных x и y выполняется неравенство

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|?$$

В.Сендеров

6. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета.

А.Голованов, Е.Сопкина

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. Для бесконечного множества значений многочлена существует более одной целой точки, в которой принимаются эти значения. Докажите, что существует не более одного целого значения многочлена, принимаемого ровно в одной целой точке.

А.Голованов

Заключительный этап

Пятый (заключительный) этап олимпиады был проведен с 14 по 21 апреля в столице Республики Адыгея Майкопе.

16 и 17 апреля участников олимпиады ожидали сложные испытания, им предстояло за 5 часов решить 4 задачи. По мнению жюри, в этом году конкурсные задания были в целом труднее, чем в предыдущие несколько лет. Оказалось, что никто из участников не сумел решить всех задач, хотя каждая задача была кем-нибудь решена.

Традиционный опрос участников олимпиады выявил наиболее интересные для них задачи: 8 для 9 и 11 классов («кусачки») и 3 для 10 класса (впервые за последние годы участники назвали лучшей задачу по геометрии!).

Школьники предложили немало интересных и оригинальных решений, иногда даже неизвестных членам жюри. Самым сильным творческим достижением жюри признало решение задачи 4 учеником 9 класса Московской государственной Пятьдесят седьмой школы Ильей Межировым. Илья оказался единственным участником, решившим эту задачу. Интересно, что это выяснилось лишь при показе работ, а до этого момента жюри не верило в правильность решения.

Интересно также отметить, что два лучших результата по параллели 11 классов были показаны десятиклассниками В.Дремовым и А.Поярковым, а второй результат по параллели 10 классов – восьмиклассником А.Халявиным.

Диплом II степени по 11 классу получил 12-летний Р.Травкин («Квант» уже рассказывал об этом талантливом мальчике из Липецка в №5 за 1997 год). Самым юным участником олимпиады оказался 11-летний краснодарец Е.Молчанов.

Жюри определило состав команды России на Международной математической олимпиаде 1999 года. В нее вошли В.Дремов, А.Евсеев, А.Лебедев, Ю.Лифшиц, Ф.Петров, А.Поярков, запасные – М.Карвонен и А.Халявин.

Задачи

9 класс

1. В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$?

С.Волченков

2. См. задачу М1696 «Задачника «Кванта».

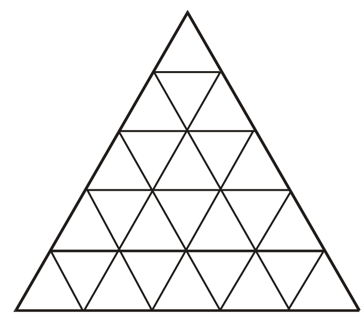
3. Треугольник ABC вписан в окружность S. Пусть A_0 – середина дуги BC окружности S, не содержащей A; C_0 – середина дуги AB, не содержащей C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC, окружность S_2 с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2.

М.Сонкин

4. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета – черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

С.Берлов

5. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на n частей (на рисунке $n = 5$).



Какое наибольшее число отрезков длины 1 с концами в вершинах этих треугольников можно отметить так, чтобы не нашлось треугольника, все стороны которого состоят из отмеченных отрезков?

М.Антонов

6. См. задачу М1699 «Задачника «Кванта».

7. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO – прямой.

С.Берлов

8. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Д.Карпов

10 класс

1. На столе стоят три пустые банки из-под меда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик – только во вторую или третью, а Пятачок – в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 1999 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл.

Ф.Бахарев

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, …, для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено условие

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}\left(a_{n-1}, a_{n-2}\right)}.$$

С.Волченков

3. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.

М.Сонкин

4. См. задачу М1704 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1697 «Задачника «Кванта».

6. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, $K \neq B$. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что угол BKO – прямой.

С.Берлов

7. См. задачу М1701 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М1702 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999?

О.Подлипский

2. Во всех рациональных точках вещественной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

С.Берлов

3. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC, CD в точках K, L, M, N соответственно. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – соответственно окружности, вписанные в треугольника AKL, BLM, CMN, DNK. К окружностям S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, – ромб.

М.Сонкин

4. См. задачу М1704 «Задачника «Кванта».

5. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой.

С.Берлов

6. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т.е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны).

В.Дольников

7. Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Д.Терешин

8. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Д.Карпов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гусев Глеб – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Волков Сергей – Мурманск, Мурманский политехнический лицей,
Деветьяров Дмитрий – Кирово-Чепецк, гимназия,
Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11;

по 10 классам –

Лифшиц Юрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Прудова Нина – Саров, гимназия 15,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,
Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,
Горский Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Мусатов Данил – Москва, гимназия 1543,
Ицыксон Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кузнецов Андрей – Киров, ФМЛ,
Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Спиридонов Сергей – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей;

по 10 классам –

Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42,
Горелов Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Тихомиров Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Скопенков Михаил – Саратов, ФТЛ 1,

Исмагилов Ильнур – Саров, муниципальный лицей 3,
Красненко Екатерина – Омск, лицей 64,
Карвонен Максим – Рыбинск, многопрофильный лицей 2,
Зильберман Роман – Челябинск, ФМЛ 31,
Федотов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Теннова Наталия – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Агапов Андрей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гайфуллин Александр – Раменское, Многопрофильная гимназия,
Зинин Евгений – Краснодар, школа-гимназия 87;

по 11 классам –

Поярков Алексей – Рыбинск, многопрофильный лицей 2,
Фарутин Александр – Санкт-Петербург, Классическая гимназия,
Петров Федор – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зуев Владимир – Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Евсеев Антон – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Трушин Борис – Долгопрудный, ФМШ 5,
Лебедев Алексей – Нижний Новгород, лицей 40,
Гаас Валерий – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей,
Травкин Роман – Липецк, школа 5,
Черников Алексей – Королев, лицей научно-инженерного профиля,
Лузгарев Александр – Киров, ФМЛ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Тарасов Никита – Нижний Тагил, Политехническая гимназия,
Мясников Родион – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Жданов Роман – Краснодар, школа 3,
Стырт Олег – Омск, ФМЛ 64,
Юдкин Дмитрий – Краснодар, школа 63,
Шаталов Игорь – Краснодар, школа-гимназия 87;

по 10 классам –

Воронов Всеволод – Иркутск, лицей 2,
Грибов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кислицын Александр – Саров, гимназия 15,
Фролов Сергей – Нижний Новгород, Нижегородская техническая гимназия,
Петров Илья – Ижевск, Естественно-гуманитарный лицей «Школа-30»,
Щербаков Станислав – Ижевск, Естественно-гумантираный лицей «Школа-30»,
Сальников Сергей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Колесников Андрей – Нижний Новгород, Нижегородская педагогическая гимназия,
Жгун Владимир – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Миронов Денис – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа;

по 11 классам –

Бейлин Андрей – Ростов-на-Дону, школа 58,
Ершов Денис – Москва, лицей «Вторая школа»,
Рачков Роман – Нижний Тагил, Политехническая гимназия,
Резников Виталий – Ангарск, школа-гимназия 10,
Филатов Евгений – Иваново, школа-лицей 22,
Певзнер Игорь – Киров, ФМЛ,
Муханов Иван – п.Афипский Краснодарского края, Афипский технический лицей,
Шишкин Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Галкин Сергей – Москва, лицей «Вторая школа»,
Баяндин Константин – Пермь, ФМШ 146,
Зиновьев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Яковенко Дмитрий – Нижневартовск, муниципальная общеобразовательная школа 13,
Мовчан Игорь – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, Д.Терешин