## «Квант» для младших школьников

### Задачи

*(см. «Квант» №4)*

**1.** При решении сразу же возникает неясный момент – был ли упомянутый год високосным или обычным, т.е. содержал 365 или 366 дней? Пока ясности в этом вопросе нет, будем считать, что в году было *Д* дней, а конкретное значение *Д* попробуем определить позже.

Если Балда отработал в году *Р* дней, то прогулял он, очевидно, $(Д - Р)$ дней. Тогда по варианту Балды поп должен был получить от него $1 \times Р - 10 \times (Д - Р)$ щелков (у Пушкина именно так: *щелков*, а не *щелчков* – должно быть, чтобы звучало поувесистей). По варианту же попа число щелков равняется $12 \times Р - 121 \times (Д - Р)$. Так как эти значения равны, то

$$1 \times Р - 10 \times (Д - Р) = 12 \times Р - 121 \times (Д - Р),$$

откуда $Р = Д \times 111/122$.

Так как числа 111 и 122 взаимно просты, значение *Д* должно делиться на 122. Из двух возможных значений *Д* лишь одно – 366 – делится на 122. Таким образом, год был високосный и содержал 366 дней, а число отработанных Балдой дней равнялось $Р = 366 \times 111/122 = 333$ (неплохой работник, как видно!).

Осталось определить число щелков, выданных Балдой попу. Оно равно

$$1 \times Р - 10 \times (Д - Р) = 1 \times 333 - 10 \times (366 - 333) = 3.$$

Всего лишь три щелка получил поп от Балды – в полном соответствии с первоисточником (а как же могло быть иначе?). Однако этого вполне хватило: поп, как мы помним, сначала подпрыгнул, затем онемел и, наконец, лишился разума. Не гонялся бы за дешевизною!

**2.** Произведение двузначных чисел номера не больше чем $99^3$. Так как $99^3 < 7^7$, то $x \le 6$. Легко проверить, что двузначные числа номера могут быть различными только при $x = 4$ или $x = 6$, но в случае $x = 4$ среди возможных разложений числа $4^4 = 256$ на множители: $256 = 32 \cdot (08) \cdot (01) = 16 \cdot (08) \cdot (02)$ нет таких цифр, которые составляли бы четыре последовательных натуральных числа. Итак, $x = 6$. В номере наверняка есть цифры 2, 3, 4. Только одно двузначное число содержит цифру 3, не содержит цифру 6, а при разложении на простые множители имеет либо двойки, либо тройки – это число 32. Следовательно, произведение двух других чисел имеет при разложении на простые множители одну двойку и шесть троек, причем одно из чисел является степенью тройки. Среди двузначных чисел степеней тройки только две: 27, 81. Тогда номерами телефона с учетом порядка убывания в нем двузначных чисел могут быть: 81-32-18, 54-32-27 – из них лишь второй содержит четыре последовательные цифры 2, 3, 4, 5.

*Ответ*: 54-32-27.

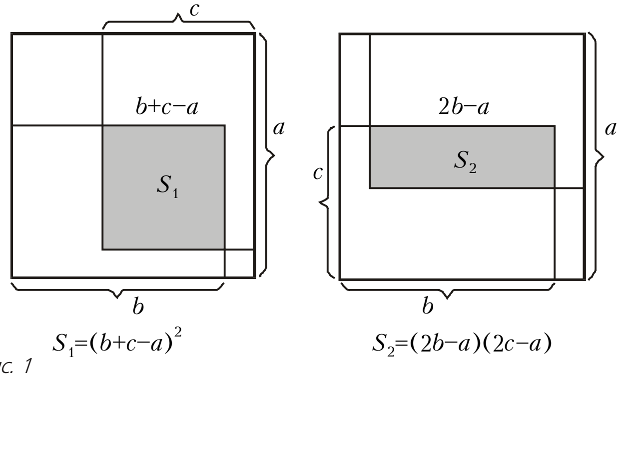


*Рис. 1*

**3.** Рассмотрим два варианта возможного расположения ковриков на полу комнаты и введем обозначения, показанные на рисунке 1 ($b$ – длина коврика, $c$ – его ширина, $b \ge c$). Получаем

$$S_1 - S_2 = (b + c - a)^2 - (2b - a) \cdot (2c - a) = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc = (b - c)^2.$$

Поскольку неизвестно, какому варианту на рисунке отвечают условные обозначения задачи *A* и *B*, то $S_1 - S_2 = |A - B|$, откуда $b - c = \sqrt{|A - B|}$.

**4.** Каждый набор из 9 горизонтальных или 9 вертикальных прямых разбивает квадрат на 10 полос. Предположим, все 9 квадратов имеют разные размеры. Тогда они могут располагаться лишь в 9 различных вертикальных и 9 различных горизонтальных полосах. В этом случае оставшиеся десятые горизонтальная и вертикальная полосы будут иметь одну и ту же ширину. В их пересечении получится десятый квадрат, чего не может быть по условию. Итак, среди 9 квадратов обязательно найдутся два одинаковых.

**5.** *Ответ*: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 (решение единственное).

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

**1.** Нет, на космонавта продолжает действовать удерживающая его на орбите сила тяготения к Земле.

**2.** Отрицательная.

**3.** При запуске с поверхности планеты, поскольку для вывода на круговую орбиту ракете уже была сообщена часть необходимой для ухода на бесконечность энергии.

**4.** В пар могут вырваться молекулы, кинетическая энергия которых больше работы выхода за поверхность жидкости. Значит, среднее значение кинетической энергии оставшихся молекул уменьшится, а температура понизится.

**5.** Жидкая пленка охватывает песчинки и стягивает их силами поверхностного натяжения.

**6.** За счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекул, т.е. понижения температуры.

**7.** Нагревание полупроводника и/или его освещение.

**8.** Та, у которой работа выхода электронов больше.

**9.** Подобно молекулам жидкости при испарении, за пределы нагреваемого металла могут вылетать только самые быстрые электроны, энергия которых превышает работу выхода.

**10.** Изменяя температуру накала катода.

**11.** Электроны, образуемые за счет интенсивной термоэлектронной эмиссии раскаленного катода, производят ударную ионизацию молекул газа, что уменьшает электрическое сопротивление газового промежутка.

**12.** Чем легче налетающая частица, тем меньше ее энергия, необходимая для ионизации атома.

**13.** Да, при этом происходит ионизация атома.

**14.** При удалении второго электрона – энергия связи этого электрона больше, поскольку его необходимо удалить уже от двухзарядного иона гелия.

**15.** Нет, так как должна выделиться энергия, равная энергии связи атома водорода.

**16.** Энергия испускаемых $\beta$-частиц столь велика, что никакие переходы в электронной оболочке атома сообщить ее не в состоянии.

**17.** Фотоны притягиваются к звезде и, «выбираясь» из потенциальной ямы ее гравитационного поля, теряют энергию.

### Микроопыт

Молекулы жира связываются в кружки силами поверхностного натяжения.

## Задачи по атомной и ядерной физике

**1.** $\Delta E = \dfrac{3m_p e^4}{16(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \approx 9{,}36$ кэВ. **2.** $E_\gamma \approx 19{,}81$ МэВ.

**3.** $T_{\text{т}} = \dfrac{m_\alpha Q}{m_\alpha + M_{\text{т}}} \approx 2{,}74$ МэВ, $T_\alpha = \dfrac{M_{\text{т}} Q}{m_\alpha M_{\text{т}}} \approx 2{,}06$ МэВ.

**4.** $T = 100$ Дж.

## XXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

### Заключительный этап

#### 9 класс

**1.** *Ответ*: 9.

Заметим, что $9A = 10A - A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности сумм цифр чисел $10A$ и $A$ (которые равны) плюс 9.

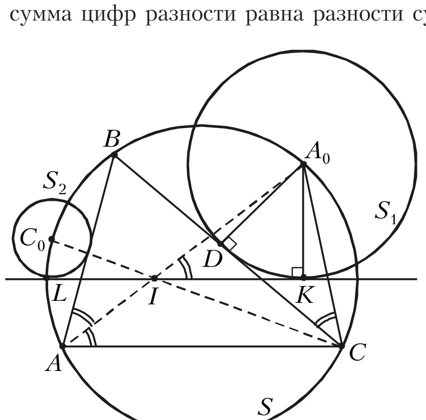


*Рис. 2*

**3.** Из точки $I$ проведем касательную $IK$ к окружности $S_1$ так, чтобы луч $IK$ пересекал меньшую дугу $A_0C$ (рис.2). Аналогичным образом проведем касательную $IL$ к окружности $S_2$. Биссектриса $AI$ угла $BAC$ делит дугу $BC$ на 2 равные дуги. Поэтому точки $A$, $I$, $A_0$ лежат на одной прямой. Аналогично, на одной прямой лежат точки $C$, $I$ и $C_0$. Из равенств

$$\angle ICA_0 = \angle C_0CA_0 = \frac{1}{2}C_0\overset{\smile}{B}A_0 = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{BA_0}\right),$$

$$\angle A_0IC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC_0} + \overset{\smile}{A_0C}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{BA_0}\right)$$

следует, что $\angle A_0IC = \angle ICA_0$ и $A_0I = A_0C$.

Далее, пусть $D$ – середина отрезка $BC$, тогда $S_1$ касается $BC$ в точке $D$.

В прямоугольных $\Delta A_0KI$ и $\Delta A_0DC$ катеты $A_0K$ и $A_0D$ равны и $A_0I = A_0C$ по доказанному выше. Следовательно, $\Delta A_0KI = \Delta A_0DC$. Отсюда $\angle A_0IK = \angle A_0CD = \angle A_0CB$. Но $\angle A_0CB = \angle A_0AB$ (теорема о вписанном угле), и $\angle A_0AB = \angle A_0AC$. Значит, $\angle A_0IK = \angle A_0AC$, следовательно, прямая $IK$ параллельна $AC$. Аналогично, $IL \| AC$, следовательно, $L$, $I$, $K$ лежат на одной прямой, параллельной $AC$.

**4.** *Ответ*: можно. Приведем решение Ильи Межирова.

Рассмотрим граф, $n$ вершин которого – $n$ натуральных чисел, а ребро соединяет числа $a$ и $b$ тогда и только тогда, когда $a$ и $b$ не взаимно просты. Докажем индукцией по $n$, что перекрасить числа в белый цвет можно при любых числах в вершинах. База индукции ($n = 1$) очевидна.

Пусть перекрасить $n$ чисел можно; докажем, что это можно сделать для $n + 1$. Для любых $n$ вершин данного графа по предположению индукции существует способ, перекрашивающий эти $n$ вершин; что при этом происходит с $(n + 1)$-й вершиной, неизвестно. Если для некоторых $n$ вершин после применения этого способа $(n + 1)$-я вершина тоже перекрашивается, то требуемое доказано: применяя этот способ, перекрашиваем все вершины. Рассмотрим оставшийся случай: для любых $n$ вершин графа мы можем перекрасить их, не перекрашивая $(n + 1)$-ю.

Заметим, что если добиться нечетного числа белых вершин, то требуемое будет доказано. В самом деле, для каждой из этих белых вершин по очереди произведем перекрашивание всех вершин, кроме нее. Белые вершины перекрасятся четное число раз и останутся белыми, а черные вершины перекрасятся нечетное число раз и станут белыми.

Рассмотрим два случая:

1) Вершин четное число. Перекрасим все, кроме одной, и получим нечетное число вершин.

2) Вершин нечетное число. Так как в любом графе количество вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно, то в данном графе существует вершина, из которой выходит четное число ребер. Перекрасим эту вершину и соединенные с ней и получим нечетное число белых вершин.

Требуемое доказано.

**5.** *Ответ*: $n(n + 1)$.

Общее количество отрезков длины 1 равно $3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$. Все отрезки, параллельные двум сторонам большого треугольника, не образуют треугольников, так как любой треугольник состоит из отрезков, параллельных всем трем сторонам. Следовательно, $\dfrac{2}{3}\cdot\left(3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$ отрезков длины 1 отметить можно.

Докажем, что большее количество отрезков отметить нельзя. Закрасим треугольники со стороной 1, как показано на рисунке 3. Треугольники содержат все отрезки длины 1, причем каждый отрезок принадлежит ровно одному треугольнику. Для того чтобы не образовался ни один из закрашенных треугольников, в каждом из них можно отметить не более двух отрезков. Значит, количество выделенных отрезков не превышает $\dfrac{2}{3}$ от их общего числа.

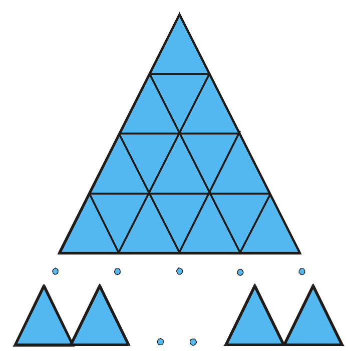

*Рис. 3*

**7.** Заметим, что $\angle BCF = 180° - \angle BEF = \angle AEF$, аналогично, $\angle EAF = \angle FDC$, значит, $\Delta AEF \sim \Delta DCF$ (рис.4). Пусть $K$ и $L$ – середины отрезков $AE$ и $CD$ соответственно. Тогда $\angle AKF = \angle FLB$ как углы между медианой и основанием в подобных треугольниках, поэтому точки $B$, $K$, $F$, $L$ лежат на одной окружности. Но так как серединные перпендикуляры к отрезкам $AE$ и $CD$ пересекаются в точке $O$, то точки $K$ и $L$ лежат на окружности с диаметром $BO$. Но тогда и точка $F$ лежит на этой окружности, и $\angle BFO$ – прямой.

**8.** Докажем, что выигрывает Петя. Мысленно разобьем контакты на четыре одинаковые группы $A$, $B$, $C$ и $D$. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи

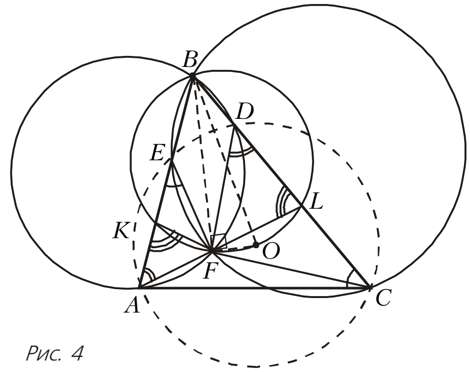


*Рис. 4*

так, чтобы для каждого номера $k$ от контактов $A_k$, $B_k$, $C_k$ и $D_k$ отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи.
Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например провод $A_iA_j$, то Петя перережет провода $B_iB_j$, $C_iC_j$ и $D_iD_j$. Если Вася перерезает провод между контактами из разных групп и с разными номерами, например провод $A_iB_j$, то Петя в ответ перережет провода $A_jB_i$, $C_iD_j$ и $C_jD_i$. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например провод $A_kB_k$, то Петя перережет провод $C_kD_k$. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода.
Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от контактов с таким же номером. Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов $A_k$, $B_k$, $C_k$ и $D_k$ отходит поровну проводов. Значит, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

### 10 класс

**1.** Пусть Винни и Пятачок вначале кладут свои орехи во II и III банки, несмотря на ходы Кролика, до тех пор, пока в одной из банок не станет 1998 орехов. После этого тот, кто должен класть орехи в эту банку (пусть, например, это Винни), начинает класть их в I. При этом он уже положил во II банку не менее 999 орехов, значит, в III банке орехов тоже не менее 999 (туда их клал Пятачок). После этого Пятачок продолжает класть в III банку орехи, пока их там не станет 1998 – это произойдет не более чем через 500 ходов, так как в III банку также приходится класть орехи Кролику, чтобы не проиграть. После этого Пятачок также может класть орехи в I банку, так как там не более 500 орехов, положенных Винни, а Кролик вынужден будет положить орех во II или III банку, где их уже по 1998.
**2.** *Ответ*: $a_1 = a_2 = \ldots = 2$.
Пусть для каких-то двух членов последовательности $a_k$ и $a_{k+1}$ их НОД равен 1. Тогда $\text{НОД}(a_k, a_{k+1}) =$
$= \text{НОД}(a_k + a_{k+1}, a_{k+1}) = \text{НОД}(a_{k+2}, a_{k+1})$, т.е. для всех последующих членов последовательности НОД тоже будет равен 1. При этом, начиная с $k$-го члена, последовательность превращается в последовательность $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, которая неограниченно возрастает.
Итак, НОД всегда должен быть не меньше 2. Если какие-то члены последовательности $a_k$ и $a_{k+1}$ не равны друг другу, то $a_{k+2} < \max\{a_k, a_{k+1}\}$ и $a_{k+1} \neq a_{k+2}$.
Аналогично, $a_{k+3} < \max\{a_{k+1}, a_{k+2}\} < \max\{a_k, a_{k+1}\}$.
Мы получили, что максимальное число в парах идущих подряд членов последовательности монотонно убывает, т.е. когда-то станет равным 1, и тогда НОД у каких-то членов тоже станет равен 1, чего не должно случиться.
Итак, все члены последовательности должны равняться друг другу и их НОД = 2, т.е. $a_n = 2$.

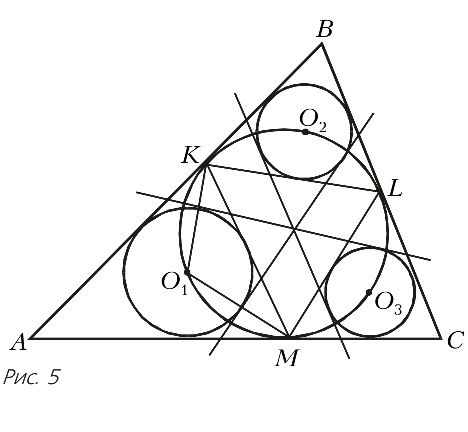

Рис. 5

**3.** Пусть $K$, $L$, $M$ – точки касания вписанной окружности со сторонами $AB$, $BC$, $AC$ соответственно, $O_1$, $O_2$, $O_3$ – центры малых окружностей (рис.5). Так как $\angle KO_1M = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$, а $\angle KLM = 90° - \dfrac{\angle A}{2}$, то $\angle KO_1M + \angle KLM = 180°$, и $O_1$ лежит на вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Аналогично, $O_2$ и $O_3$ лежат на этой окружности и являются серединами дуг $KL$ и $LM$. Используя результат задачи 3 для 9 класса, заключаем, что построенные касательные проходят через центр окружности, вписанной в треугольник $KLM$, что и требовалось доказать.
**6.** Задача является частным случаем задачи 7 для 9 класса, когда точки $E$ и $D$ совпадают с точкой $B$.

### 11 класс

**1.** *Ответ*: нет.
Пусть сумма цифр каждого из чисел равна $S = 9k + n$, $n = 0, 1, \ldots, 8$. Тогда все эти числа имеют остаток $n$ при делении на 9, и имеет место сравнение $19n = 18n + n \equiv 1999 \pmod 9$, откуда $n \equiv 1 \pmod 9$, т.е. $n = 1$.
1) Пусть $k = 0$, т.е. $S = 1$. Рассмотрим 5 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 1. Это числа 1, 10, 100, 1000 и 10000. Но даже их сумма больше 1999.
2) Пусть $k = 1$, т.е. $S = 10$. Рассмотрим 19 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 10. Это числа 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190. Их сумма равна 1990 < 1999. Следующее натуральное число с суммой цифр, равной 10, есть 208, что по крайней мере на 18 больше любого из первых 19 чисел, и, значит, сумма будет не менее 1990 + 18 = 2008 > 1999.
3) Пусть $k \geq 2$, т.е. $S \geq 19$. Но наименьшее число с суммой цифр не меньше 19 есть 199, а сумма любых 19 таких чисел будет заведомо больше 1999.
Таким образом, мы получили, что 19 чисел, удовлетворяющих условию, не существуют.
**2.** Предположим противное, т.е. пусть существует такая расстановка целых чисел, что для любого отрезка $AB$ с серединой $C$ выполняется неравенство $c < \dfrac{a+b}{2}$, где $a$, $b$, $c$ – соответственно числа, стоящие в точках $A$, $B$ и $C$. Пусть $A$, $B$, $C$, $A_n$, $B_n$, $n = 1, 2, \ldots$, – соответственно точки $-1$, 1, 0, $-\dfrac{1}{2^n}$, $\dfrac{1}{2^n}$ числовой прямой, $a$, $b$, $c$, $a_n$, $b_n$ – целые числа, записанные в этих точках. Тогда, по предположению, $c < \dfrac{a+b}{2}$, $a_1 < \dfrac{a+c}{2}$, $a_2 < \dfrac{a_1+c}{2}$ и т.д. Отсюда следует, что $\max\{a,c\} > \max\{a_1,a_2\}$, так как $a_1 < \dfrac{a+c}{2} \leq \dfrac{\max\{a,c\}+\max\{a,c\}}{2} = \max\{a,c\}$, $a_2 < \dfrac{a_1+c}{2} \leq \dfrac{\max\{a,c\}+c}{2} \leq \max\{a,c\}$. Аналогично, $\max\{a_1,a_2\} > \max\{a_3,a_4\} > \max\{a_5,a_6\} > \ldots$ и $\max\{b,c\} > \max\{b_1,b_2\} > \max\{b_3,b_4\} > \ldots$ Таким образом, $a_{2m} < \max\{a,c\} - m$, $b_{2m} < \max\{b,c\} - m$, и, значит, при некотором $m$ будет выполнено неравенство $a_{2m} + b_{2m} \leq 2c$. Противоречие, так как число $c$ записано в середине отрезка $A_{2m}B_{2m}$.
**3.** Введем обозначения (рис.6). Как было показано в решении задачи 3 для 9 класса, $RQ \| KM \| EF$, $RE \| LN \| QF$. Значит, образовавшийся четырехугольник – параллелограмм. Используя то, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны и $AB + CD = AD + BC$, получаем $RQ + EF = RE + QF$, так как $(RQ + EF) - (RE + QF) = (a_{12} + a_{34}) - (a_{23} + a_{41})$, где $a_{ij}$ – длина общей внешней касательной к окружностям $S_i$ и $S_j$.
Значит, $RQFE$ – ромб.

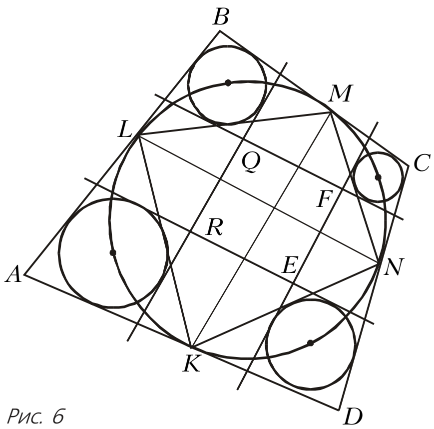

Рис. 6

**5.** Набор натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи, условимся называть *хорошим.* Пусть существует хороший набор. Ясно, что если $(a, b, c, d)$ – хороший набор, то и $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right)$ – тоже хороший набор, где $k =$ $=$ НОД$(a, b, c, d)$. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$\text{НОД}(a, b, c, d) = 1. \qquad (*)$$

Пусть одно из данных чисел, например $a$, имеет нечетный простой делитель $p$. Тогда суммы $b + c$, $c + d$, $b + d$ и, следовательно, сами числа $b$, $c$ и $d$ делятся на $p$ (ибо, например, $2d = (b + d) + (c + d) - (b + c)$), что противоречит условию $(*)$. Значит, числа $a$, $b$, $c$, $d$ – степени двойки. Упорядочив данные числа в порядке возрастания, получим $a = 2^m$, $b = 2^n$, $c = 2^r$, $d = 2^s$, где $0 = m \le n \le r \le s$, $r \ge 1$ (иначе $m = n = r = 0$, значит, $a = b = c$).

Тогда число $(a + c)^2 = \left(1 + 2^r\right)^2$ нечетно и не может делиться на четное число $bd$.

**6.** Пусть каждый из многоугольников $A$, $B$, $C$ можно отделить от двух других. Докажем, что их нельзя пересечь одной прямой. Предположим противное: $X$, $Y$, $Z$ – соответственно точки многоугольников $A$, $B$, $C$, лежащие на одной прямой. Тогда одна из точек, например $Y$, лежит на прямой между $X$ и $Z$. Следовательно, $B$ нельзя отделить от $A$ и $C$, так как в противном случае точку $Y$, лежащую между двумя другими $X$ и $Z$, нужно отделить от этих точек одной прямой, что невозможно.

В обратную сторону утверждение можно доказать двумя способами.

1) Рассмотрим треугольники с вершинами $X \in A$, $Y \in B$, $Z \in C$. Пусть из всех таких треугольников наименьшую высоту имеет треугольник $X_0Y_0Z_0$ и эта высота проведена из вершины $Y_0$. Тогда прямая, перпендикулярная высоте и проходящая через середину высоты, не пересекает многоугольники $B$, $A$ и $C$, так как, в противном случае, существовал бы треугольник с меньшей высотой, выходящей из $Y_0$.

2) Рассмотрим две внешние касательные к многоугольникам $A$ и $C$. Тогда они не могут пересекать $B$. Если мы сдвинем немного ту, которая лежит ближе к $B$, в направлении к многоугольнику $B$, то получим прямую, отделяющую $B$ от $A$ и $C$.

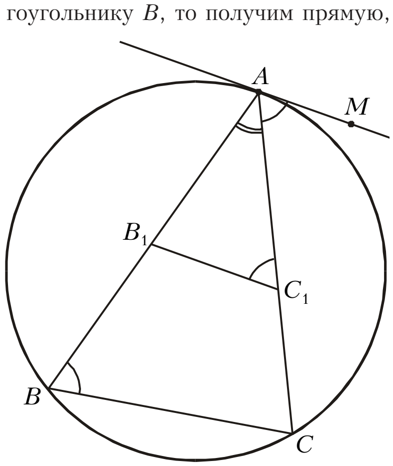

Рис. 7

**7.** Проведем плоскость, параллельную касательной плоскости, пересекающую ребра $AB$, $AC$ и $AD$ в точках $B_1$, $C_1$ и $D_1$ соответственно. В плоскости $ABC$ получим конфигурацию, изображенную на рисунке 7. Заметим, что $\angle ABC = \angle CAM$ (по теореме об угле между касательной и хордой), а $\angle CAM = \angle AC_1B_1$ (как накрест лежащие при параллельных и секущей), т.е. $\angle ABC = \angle AC_1B_1$. Следовательно,

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ACB.$$

Откуда

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AC_1}{AB}.$$

Аналогично,

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AC_1}{AD} = \frac{AD_1}{AC}$$

и

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AB} = \frac{AB_1}{AD}.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$\frac{C_1D_1}{AB \cdot CD} = \frac{AD_1}{AB \cdot AC} = \frac{B_1D_1}{AC \cdot BD} = \frac{AB_1}{AD \cdot AC} = \frac{B_1C_1}{AD \cdot BC}.$$

Значит, $\Delta D_1B_1C_1$ равносторонний тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Осталось заметить, что углы, образуемые указанными в условии линиями пересечения, соответственно равны углам треугольника $D_1B_1C_1$.

**8.** Докажем, что выигрывает Петя. Разобьем контакты на четыре одинаковые группы $A$, $B$, $C$ и $D$. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Мысленно покрасим в черный цвет провода между контактами с разными номерами и в белый цвет – между контактами с одинаковыми номерами.

Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера $k$ от контактов $A_k$, $B_k$, $C_k$ и $D_k$ отходило поровну черных проводов, и если у одного из контактов больше нет белых проводов, то их не было бы и у других контактов с таким же номером. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи.

Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Сначала рассмотрим случай, когда Вася режет черный провод. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например провод $A_iA_j$, то Петя перережет провода $B_iB_j$, $C_iC_j$ и $D_iD_j$. Если Вася перерезает провод между контактами из разных групп и с разными номерами, например провод $A_iB_j$, то Петя в ответ перережет провода $A_jB_i$, $C_iD_j$ и $C_jD_i$. Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от вершин с таким же номером.

Остается рассмотреть случай, когда Вася перерезал белый провод, т.е. провод между контактами из разных групп, но с одинаковыми номерами. Рассмотрим четыре контакта $A_k$, $B_k$, $C_k$ и $D_k$. Первоначально любые два из них соединены проводом. После того как Вася перерезал первый из этих проводов, например провод $A_kB_k$, Петя перережет два провода так, чтобы между этими контактами осталось три провода, имеющие один общий конец (например, Петя может перерезать провода $B_kC_k$ и $C_kA_k$, после чего останутся провода $A_kD_k$, $B_kD_k$ и $C_kD_k$, что подтверждает возможность такого хода). Если же Вася когда-нибудь перережет один из этих трех проводов, то от одного из контактов $A_k$, $B_k$ или $C_k$ он отрежет последний провод к контактам с этим же номером $k$, следовательно, от того контакта будет отходить провод к контакту с *другим* номером. Значит, и от трех других контактов с номером $k$ будут отходить провода к контактам с другим номером, следовательно, Петя может перерезать два оставшихся провода между контактами с номером $k$, что он и сделает.

Отметим, что каждый раз после хода Пети описанное выше условие выполняется. Следовательно, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

## XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

### Теоретический тур

*9 класс*

**1.** $s = g\tau^2/2 \approx 5$ м.

**2.** 1) $a_к = g\dfrac{m\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}$; 2) $\dfrac{M}{m} > \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha}$.

**3.** 1) $I_0 = I/89 = 0{,}1$ А; 2) $U_{xy} = 233rI_0 = 23{,}3$ В;
3) $R_{xy} = U_{xy}/(144I_0) = 1{,}62$ Ом.

**4.** См. рис.8; можно увидеть 5 изображений источника $S_0$. *Указание.* Все изображения лежат на окружности, проведен-

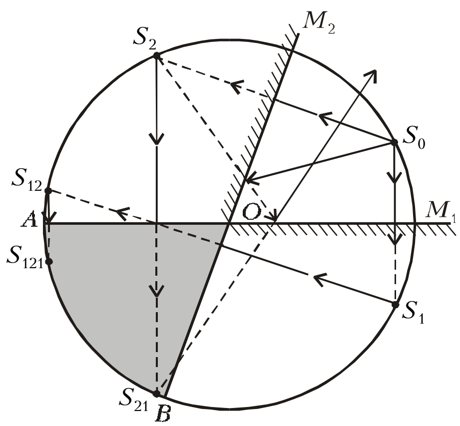


Рис. 8

ной из точки $O$ через точку $S_0$; изображение, оказавшееся в секторе $AOB$, не может более отразиться в зеркалах $M_1$ и $M_2$.

*10 класс*

**1.** 1) $v_{2отн} = 0{,}5v = 10$ км/ч; 2) $v_{2отн} = 5{,}5v = 110$ км/ч.

**2.** $T_2 = 313$ К (см. рис.9), $t_2 = 40$ °С.

**3.** *Указание.* Воспользуйтесь данной диаграммой, уравнением Клапейрона – Менделеева и первым началом термодинамики.

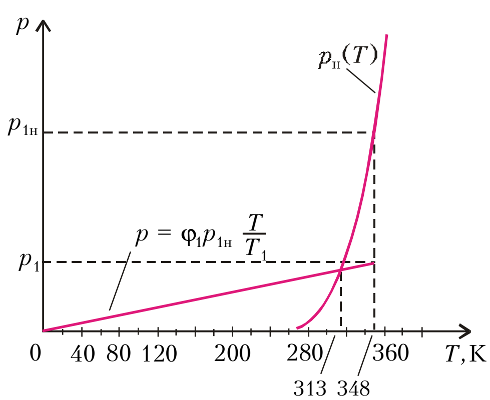


Рис. 9

**4.** 1) $U_1 = \mathcal{E}/2$; 2) $I_1 = \mathcal{E}/(2R_1)$; 3) $q_{1\max} = C_1\mathcal{E}$;
4) $Q = C_1\mathcal{E}^2/2$.

**5.** $Q = 25$ Дж.

*11 класс*

**1.** 1) $t_1 = u/(2\mu g)$; 2) кинетическая энергия трубки увеличилась на $\Delta E_k = Mu^2/4$; 3) $Q = Mu^2/4$ (выделившееся количество теплоты равно изменению кинетической энергии трубки в системе координат, связанной с движущейся лентой).

**2.** $\tau = \pi/\left(2\sqrt{\alpha M}\right) \approx 3{,}14\cdot 10^9$ с $\approx$ 100 лет.

**3.** 1) $t_{\min} = \dfrac{\lambda m_0}{N}\left(\dfrac{T_0}{T_х} - 1\right) \approx 22$ мин;

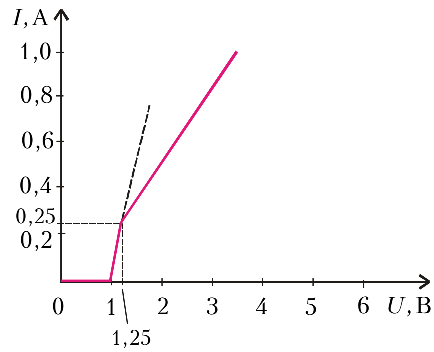


Рис. 10

2) $T_к = T_0\left(1 + \dfrac{2}{5}\dfrac{\lambda m_0 T_0}{p_0 V T_х}\right) \approx 318$ К.

**4.** См. рис.10.

**5.** $R_{\min} = R_1\sqrt{\sin\varphi} \approx 71$ см (заметим, что $R_{\min} > R_0 = 30$ см).

*Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:*

*Курьер образования*
http://www.courier.com.ru

*Vivos Voco!*
http://www.techno.ru/vivovoco
*(раздел «Из номера»)*


# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №