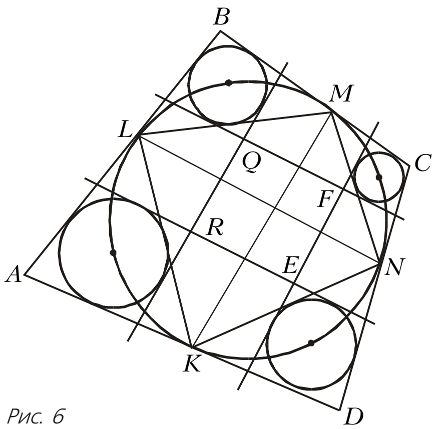

Рис. 6

5. Набор натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи, условимся называть *хорошим.* Пусть существует хороший набор. Ясно, что если $(a,\ b,\ c,\ d)$ – хороший набор, то и $\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k},\frac{c}{k},\frac{d}{k}\right)$ – тоже хороший набор, где $k = \text{НОД}(a,\ b,\ c,\ d)$.

Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$\text{НОД}(a,\ b,\ c,\ d) = 1. \qquad (*)$$

Пусть одно из данных чисел, например a, имеет нечетный простой делитель p. Тогда суммы $b + c$, $c + d$, $b + d$ и, следовательно, сами числа b, c и d делятся на p (ибо, например, $2d = (b + d) + (c + d) - (b + c)$), что противоречит условию $(*)$. Значит, числа a, b, c, d – степени двойки. Упорядочив данные числа в порядке возрастания, получим $a = 2^m$, $b = 2^n$, $c = 2^r$, $d = 2^s$, где $0 = m \le n \le r \le s$, $r \ge 1$ (иначе $m = n = r = 0$, значит, $a = b = c$).

Тогда число $(a+c)^2 = \left(1+2^r\right)^2$ нечетно и не может делиться на четное число bd.

6. Пусть каждый из многоугольников A, B, C можно отделить от двух других. Докажем, что их нельзя пересечь одной прямой. Предположим противное: X, Y, Z – соответственно точки многоугольников A, B, C, лежащие на одной прямой. Тогда одна из точек, например Y, лежит на прямой между X и Z. Следовательно, B нельзя отделить от A и C, так как в противном случае точку Y, лежащую между двумя другими X и Z, нужно отделить от этих точек одной прямой, что невозможно.

В обратную сторону утверждение можно доказать двумя способами.

1) Рассмотрим треугольники с вершинами $X \in A$, $Y \in B$, $Z \in C$. Пусть из всех таких треугольников наименьшую высоту имеет треугольник $X_0Y_0Z_0$ и эта высота проведена из вершины Y_0. Тогда прямая, перпендикулярная высоте и проходящая через середину высоты, не пересекает многоугольники B, A и C, так как, в противном случае, существовал бы треугольник с меньшей высотой, выходящей из Y_0.

2) Рассмотрим две внешние касательные к многоугольникам A и C. Тогда они не могут пересекать B. Если мы сдвинем немного ту, которая лежит ближе к B, в направлении к многоугольнику B, то получим прямую, отделяющую B от A и C.

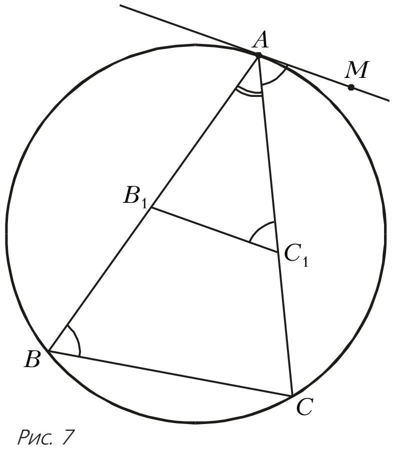

Рис. 7

7. Проведем плоскость, параллельную касательной плоскости, пересекающую ребра AB, AC и AD в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно. В плоскости ABC получим конфигурацию, изображенную на рисунке 7. Заметим, что $\angle ABC = \angle CAM$ (по теореме об угле между касательной и хордой), а $\angle CAM = \angle AC_1B_1$ (как накрест лежащие при параллельных и секущей), т.е. $\angle ABC = \angle AC_1B_1$. Следовательно,

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ACB.$$

Откуда

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AC_1}{AB}.$$

Аналогично,

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AC_1}{AD} = \frac{AD_1}{AC}$$

и

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AB} = \frac{AB_1}{AD}.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$\frac{C_1D_1}{AB\cdot CD} = \frac{AD_1}{AB\cdot AC} = \frac{B_1D_1}{AC\cdot BD} = \frac{AB_1}{AD\cdot AC} = \frac{B_1C_1}{AD\cdot BC}.$$

Значит, $\Delta D_1B_1C_1$ равносторонний тогда и только тогда, когда $AB\cdot CD = AC\cdot BD = AD\cdot BC$.

Осталось заметить, что углы, образуемые указанными в условии линиями пересечения, соответственно равны углам треугольника $D_1B_1C_1$.

8. Докажем, что выигрывает Петя. Разобьем контакты на четыре одинаковые группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Мысленно покрасим в черный цвет провода между контактами с разными номерами и в белый цвет – между контактами с одинаковыми номерами.

Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну черных проводов, и если у одного из контактов больше нет белых проводов, то их не было бы и у других контактов с таким же номером. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи.

Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Сначала рассмотрим случай, когда Вася режет черный провод. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_iB_j, C_iC_j и D_iD_j. Если Вася перерезает провод между контактами из разных групп и с разными номерами, например провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от вершин с таким же номером.

Остается рассмотреть случай, когда Вася перерезал белый провод, т.е. провод между контактами из разных групп, но с одинаковыми номерами. Рассмотрим четыре контакта A_k, B_k, C_k и D_k. Первоначально любые два из них соединены проводом. После того как Вася перерезал первый из этих проводов, например провод A_kB_k, Петя перережет два провода так, чтобы между этими контактами осталось три провода, имеющие один общий конец (например, Петя может перерезать провода B_kC_k и C_kA_k, после чего останутся провода A_kD_k, B_kD_k и C_kD_k, что подтверждает возможность такого хода). Если же Вася когда-нибудь перережет один из этих трех проводов, то от одного из контактов A_k, B_k или C_k он отрежет последний провод к контактам с этим же номером k, следовательно, от того контакта будет отходить провод к контакту с *другим* номером. Значит, и от трех других контактов с номером k будут отходить провода к контактам с другим номером, следовательно, Петя может перерезать два оставшихся провода между контактами с номером k, что он и сделает.

Отметим, что каждый раз после хода Пети описанное выше условие выполняется. Следовательно, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.