каждую букву а на АА, б – на ББ, в – на АБ. Получим слово

ААББАБААББАБААББАБ … ААББАБ …

Самые длинные палиндромы в этом слове – АББА и БААБ – имеют длину 4. Рассмотрев любое $n$-буквенное подслово этого слова, получаем неравенство $f(n) \geq n/4$. Значит, отношение $n/f(n)$ ограничено сверху числом 4.

А теперь – самое интересное. По-видимому, верна следующая теорема.

**Теорема 2.** *При любом натуральном n имеем* $f(3n) = n + 1$, $f(3n + 1) = n + 1$, $f(6n + 2) = 2n + 2$. *При любом натуральном* $n > 1$ *имеем* $f(6n + 5) = 2n + 2$, *исключительное значение* $f(11) = 5$.

**Следствие.** *Предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{f(n)}$ *существует и равен 3.*

К сожалению, доказательство этой теоремы требует довольно большого перебора. Но главная идея может быть изложена довольно-таки коротко: *каждое слово из n букв А и Б может быть разбито не более чем на* $[(n + 4)/3]$ *палиндромов.*

Это легко доказать по индукции: база очевидна, а переход состоит в следующем. Если мы от слова сумеем отрезать начало длиной $3s$ или более, которое можно разбить на $s$ палиндромов, то мы победили. Поэтому будем рассматривать только слова, в которых этого сделать нельзя. Довольно скучный перебор показывает, что есть всего одна неприятная возможность – это

АБААББ(БААБАБ)(БААБАБ)…,

где БААБАБ'ы бесконтрольно размножаются. С этим словом надо разобраться индивидуально. (Проделайте эту работу!)

К сожалению, неравенства

$$f(n) \leq [(n + 4)/3] \qquad (3)$$

недостаточно для доказательства теоремы 2. Нужно еще убедиться, что при $n = 6k + 5$, где $k > 1$, неравенство строгое.

При $n \leq 17$ это верно. Если $n > 17$, то рассмотрим начало $n$-буквенного слова – первые его 6 букв. Будем считать, что слово начинается на букву А. Если начало можно разбить не более чем на 2 палиндрома, то все в порядке. Значит, осталось рассмотреть только те начала, которые в таблице были отмечены восклицательными знаками: 1) ААБАББ, 2) ААББАБ, 3) АБААББ, 4) АБАББА и 5) АББАБА.

Начнем с третьего случая: АБА–АББ. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут одни только буквы Б. (Это очень важное соображение, и потому я прошу задержаться взглядом на этом месте и хорошо все обдумать.) Поскольку слово АБААББ…ББ можно разбить на 3 палиндрома, что прекрасно согласуется с неравенством (3), третий случай разобран.

Аналогично, в пятом случае: АББА–БА. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут только буквы А. Слово АББАБА…АА можно разбить на 3 палиндрома, и это согласуется с неравенством (3).

В четвертом случае припишем к началу АБАББА всевозможными способами шестибуквенные слова:

АБА+ББ+АААААAА
А+БАБ+БААААААБ
А+БАБ+БААААAБ+А
. . . . . . . . . . . . . . . .
АБА+ББ+АББББBА
А+Б+АББА+ББББББ

Многоточия стоят потому, что в журнале никак нельзя привести все слова, хотя для доказательства я перебирал все подряд!

Аналогично рассматриваем второй случай:

А+АББА+Б+АААААА
А+АББА+БААААAБ
АА+ББ+АБААAАБА
. . . . . . . . . . . . . . . .
АА+ББ+АББББББА
А+АББА+ББББББ

Осталось рассмотреть первый случай:

АА+БАБ+Б+АААААА
АА+БАБ+БААААAБ
АА+БАБ+БААААБ+А
А+АБА+ББААААББ
АА+Б+АББА+ААБАА
АА+БАБ+БАААБ–АБ
АА+БАБ+БАААБ–БА
. . . . . . . . . . . . . . . . . .
АА+Б+АББББББА
АА+БАБ+ББББББ

При этом обнаруживается, что все слова поддаются разбиению, кроме двух: ААБАБББАААБА и ААБАБББААБАБ. Если приписать к первому из них букву А, то получаем АА+Б+АБББА+ААБАА. Если же приписать букву Б, то получим слово ААБАБББАААБАБ, с которым надо разбираться всерьез:

АА+БАБ+ББ+АААБАБААА+АА
АА+БАБ+ББ+АААБАБААА–АБ
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
АА+БАБ+Б+БАААБ+АББББA
АА+БАБ+Б+БАААБ–АББББББ

Мы победили слово ААБАБББАААБА! Осталось (непобедимое!) слово ААБАБББААБАБ. Справиться с ним мешает периодически продолжаемое слово ААБАБББААБАББВАА-БАББААБАББААБАБ… Как с ним быть — не знаю.

Но если удастся разобраться с этим, останется выписать для каждого натурального $n$ слово длиной $n$, которое нельзя разбить менее чем на указанное в теореме 2 число палиндромов – и доказательство будет закончено! К сожалению, я не представляб, как завершить это доказательство без крайне утомительного перебора.

**Упражнения**

**12.** Придумайте слово из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на 3 палиндрома, но которое после приписывания к нему справа или слева любой из букв А и Б можно разбить на два палиндрома.

**13.** Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots, 21$ укажите слово длиной $n$ из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на $f(n)$ палиндромов.

*Примечание.* Познакомившись с рукописью этой статьи, И.Акулич чистосердечно раскаялся в своих заблуждениях и поклялся в дальнейшем и близко не подходить к компьютерам. Он признал удивительную интуицию учителя физики В. Боева, который, едва ознакомившись с третьей задачей, сразу заявил, хотя и бездоказательно: «Предел равен трем».

В заключение неисправимый грешник добавил: «Представляете, чего мог бы достичь лорд Рэлей, если бы у него был «Пентиум»?!»

## Послесловие

Понятно, что цель «компьютеризации» школьного образования — поручить компьютеру решение скучных и трудоемких задач, сохраняя время для более важных дел. При этом открывается путь — «изучать (науку), обучая (компью-