чем дальше, тем больше понадобится знаков целой части, так что лучше уж писать простые приближенные формулы, чем нагромождать квадратные скобки.) Когда вычеркнем каждое четвертое из оставшихся чисел, останется примерно $3/4$ предыдущего количества, т.е. $\frac{3}{4}N/3 = N/4$. И вообще, после вычеркивания каждого k-го числа останется примерно $n = N/k$ чисел.

Казалось бы, все уже сделано: мы помним, что вычисления заканчиваются в момент, когда $k > n$, т.е. $k^2 > N$. Значит, k-й член последовательности должен быть *примерно* равен k^2. Только вот правильного ответа $\pi k^2/4$ такое простое рассуждение никак не дает!

Почему не дает? Из-за многократно повторенных слов «примерно» и «приблизительно». Заменяя целую часть числа самим этим числом, мы делаем не очень большую – не больше 1 – ошибку. Но за k шагов ошибки накапливаются и оказываются по величине сравнимы с самой исследуемой величиной.

Обратите внимание: в начале вычислений k невелико, а N/k огромно, так что относительная ошибка невелика, а с ростом k и соответственным уменьшением величины N/k относительная ошибка возрастает!

Что происходит в конце вычислений?

В самый последний момент число k оказывается равно количеству n уцелевших к этому моменту чисел. Перед этим довольно продолжительное время k приблизительно равно n и потому на каждом таком k-м шаге вычеркиваем по одному числу. Перед этим несколько более короткое, но тоже продолжительное время вычеркиваем по два числа, перед этим – по три числа, и так далее.

Давайте придадим этому более точную форму. Пусть самый последний шаг – вычеркивание j-го числа из j уцелевших к этому моменту. Тогда перед ним вычеркнули $(j-1)$-е число из $j+1$, при этом было $k = j-1$ и $n = j+1$. Чуть раньше $k = j-2$ и $n = j+2$, еще раньше $k = j-3$ и $n = j+3$. Вообще, если идти с конца к началу, то до тех пор, пока вычеркивали по одному числу, выполнялись равенства $k = j-a$ и $n = j+a$. Переход на другой режим происходит в момент, когда $2(j-a) \approx j+a$, т.е. когда $a \approx j/3$. При этом $k \approx \frac{2}{3}j$ и $n \approx 2k$. (Разумеется, можно было бы получить не приближенные, а точные формулы. Но дальнейшие рассуждения все равно потребуют приближенных формул, так что мы обойдемся без лишних квадратных скобок.)

Теперь ясно, что формулы $k \approx \frac{2}{3}j - b$ и $n \approx \frac{4}{3}j + 2b$ описывают процесс на той стадии, когда вычеркиваем по два числа. Переход на режим вычеркивания по три числа соответствует равенству $3\left(\frac{2}{3}j - b\right) \approx \frac{4}{3}j + 2b$, из которого находим $b \approx \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}j$, откуда $k \approx \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}j$ и $n \approx 3k$.

Продолжая рассуждать в том же духе и обозначая для краткости $c_m = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$, находим, что переход между режимами вычеркивания по m и по $m+1$ чисел происходит при $k \approx c_m j$ и $n \approx (m+1)k$.

Сознательно сделав несколько вычислительных ошибок, Акулич смог из этих формул получить число $\pi/4$. Будучи честным человеком, он сам обратил внимание читателей на эти передергивания и признал, что «рассуждения имеют немало огрехов, но искоренять их как-то не поднимается рука: не навредить бы!». В общем, он поступил как инженер, которому некогда разбираться с тонкостями математических формул и который поэтому не постесняется умножить или разделить полученный ответ на 2 или на что-нибудь другое, если после этого ответ будет лучше соответствовать экспериментальным данным.

А дело в том, что формулы $k \approx c_m j$ и $n \approx (m+1)k$ довольно точны при маленьких m и теряют точность при возрастании m. Эффект такой же, какой мы уже наблюдали, когда рассматривали процесс от начала к концу: ошибка накапливается и оказывается при больших m сопоставимой с самой исследуемой величиной.

Стыковка

Что же делать, если и при рассмотрении от начала к концу, и при рассмотрении от конца к началу успевает накопиться ошибка? Любой строитель подземного тоннеля знает ответ: надо пустить их навстречу друг другу! В момент стыковки $k \approx c_m j$ и $N/k \approx (m+1)c_m j$, откуда $N \approx (m+1)c_m^2 j^2$. В силу формулы Валлиса, $(m+1)c_m^2 \to \pi/4$, так что мы получили в точности то, что требовалось. И заметьте: никакого обмана и обсчета читателей!

Доказательство формулы Валлиса

Использовать формулу Стирлинга $m! \approx (m/e)^m\sqrt{2\pi m}$ для доказательства формулы Валлиса я не буду, поскольку самое известное и простое доказательство формулы Стирлинга состоит именно в том, что сначала доказывают соотношение $m! \approx k\sqrt{m}(m/e)^m$ с некоторым неизвестным коэффициентом k, а затем из формулы Валлиса находят $k = \sqrt{2\pi}$.

Я сделаю проще: как рекомендуют с давних пор по этому поводу учебники математического анализа, рассмотрю

$$a_m = \int_0^\pi \sin^m x\,dx.$$

Тогда $a_0 = \pi$ и $a_1 = 2$. Далее – интегрирование по частям в стиле вытягивающего себя за волосы из болота Мюнхгаузена:

$$a_{m+1} = \int_0^\pi \sin^{m+1}x\,dx = -\int_0^\pi \sin^m x\,d\cos x = -\sin^m x\cos x\Big|_0^\pi +$$
$$+\ m\int_0^\pi \cos^2 x\sin^{m-1}x\,dx = m\int_0^\pi \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{m-1}x\,dx =$$
$$= ma_{m-1} - ma_{m+1},$$

откуда

$$a_{m+1} = \frac{m}{m+1}a_{m-1}.$$

Теперь легко находим $a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 2\cdot\frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi$, и вообще

$$a_{2m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}\pi,\quad a_{2m+1} = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Какое отношение все эти интегралы имеют к формуле Валлиса? Самое прямое: из неравенств

$$a_{2m-1} > a_{2m} > a_{2m+1}$$