# «Пентиум» хорошо, а ум лучше

**А.БААБАБОВ**

## Решето и $\pi/4$

*По одной колее навстречу друг другу выш-ли два поезда. И не встретились.*
*— Почему?*
*— Не судьба...*

**Анекдот**

Как известно, для нахождения простых чисел можно использовать решето Эратосфена: выписываем подряд натуральные числа 1, 2, 3, 4, … (чем больше, тем лучше), а затем зачеркиваем сначала числа 4, 6, 8, 10, …, затем числа 6, 9, 12, 15, …, на следующем шаге – числа 10, 15, 20, 25, … В конце концов незачеркнутыми останутся только простые числа и число 1.

Решето Акулича устроено иначе. Он не *за*черкивает, а *вы*черкивает числа. Точнее говоря, сначала вычеркивает из натурального ряда каждое второе число (2, 4, 6, …), затем вычеркивает каждое третье из оставшихся чисел, затем – каждое четвертое из оставшихся, и так далее. Что останется? Останется довольно-таки странная последовательность: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, … Вычислять ее вручную – весьма утомительное и неблагодарное дело.

## Программа

Мой ученик одиннадцатиклассник В.Иофик написал на Borland C++ 3.1 программу, которая позволяет найти многие тысячи членов последовательности Акулича.

```
#include<alloc.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
main(int argc, char *argv[])
{
 if(argc<3){printf("\nНаберите в командной строке:\n\
   %s <имя_файла> <натуральное_число>",argv[0]); return 1;}
 FILE *f=fopen(argv[1],"w");
 if(!f){printf("\n\nНе могу открыть файл \'%s\'\a",argv[1]);
        return 2;}
 long k, n=(atol(argv[2])+1)/2, m=n;
register long i,j;
char huge *arr=(char huge *)farcalloc(m,sizeof(char));
if(!arr){printf("\n\nНе хватает памяти.\a");
         fclose(f);return 3;}
printf("\nВыделено %ld байт памяти \n",m);
for(i=0;i<m;i++)arr[i]=1;
for(k=3;k<=n;k++)
 {printf("\rВычеркиваю каждое %ld из %ld чисел       ",k,n);
  for(i=0,j=0;i<m;i++)
   {if(arr[i])j++; if(j==k){j=0;arr[i]=0;n--;} }
 }
printf("\rЗаписываю результаты в файл \'%s\'          ",argv[1]);
double d;
for(i=0,j=0;i<m;i++)if(arr[i])
 {j++; d=(double)(8*i+4)/(j*j);
  if((fprintf(f,"%9ld     %lf\n",2*i+1,d))==EOF)
  {printf("\n\nОшибка записи.\a");
   fclose(f); farfree(arr); return 4;}
 }
fclose(f); farfree(arr); return 0;
}
```

*Окончание. Начало см. в «Квант» №4*

В этой программе в каждый момент вычислений $n$ обозначает количество уцелевших чисел, а $k$ пробегает значения 2, 3, 4, 5, … до тех пор, пока не окажется $k > n$, что и является сигналом к окончанию вычислений. Ради экономии времени и памяти все четные числа вычеркнуты до начала вычислений, так что программа во время вывода результатов применяет формулу $2i + 1$ для нечетного числа и формулу $(8*i+4)/(j*j)$ – для учетверенного отношения $j$-го члена последовательности к квадрату его номера.

Применив списки вместо массивов и некоторые другие программистские хитрости (компилятор GNU C), Иофик затем написал программу, которая справилась с первыми ста миллионами чисел (и даже больше!). Например, 3826-й член последовательности оказался равен 11499769. При этом $4 \cdot 11499769 / \left(3826^2\right) \approx 3{,}1423$.

## Число $\pi/4$ и формула Валлиса

Результаты вычислений убедительно свидетельствуют: при $j \to \infty$ отношение величины $j$-го члена изучаемой последовательности к $j^2$ стремится к $\pi/4$. Значит, решето Акулича позволяет вычислять длину окружности! Как он сам пишет, «такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря уже о любителе математики».

Да, результат удивительный. Но давайте не будем падать в обморок. Число $\pi$ встречается не только в геометрии, но и в математическом анализе. Например,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

Известны и другие соотношения с участием $\pi$. Нам потребуется только одно из них – опубликованная в 1665 году английским математиком Джоном Валлисом (1616–1703) формула

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2m}{2m+1}\right)^2 = \frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Чтобы понять, как она связана с решетом Акулича, давайте проанализируем процесс вычеркивания. Поклонники «Пентиума» при этом могут смотреть на экран компьютера, на котором работает программа Иофика.

## Что происходит в начале вычислений?

Для вычислений мы берем не весь натуральный ряд, а лишь первые $N$ натуральных чисел и вычеркиваем сначала каждое второе из них, оставляя в точности $N - [N/2]$ чисел, т. е. приблизительно $N/2$. Затем вычеркиваем каждое третье число из оставшихся, так что останется примерно $2/3$ остатка, т.е. приблизительно $N/3$. (Точную формулу все еще несложно написать: $N - [N/2] - \left[\dfrac{N-[N/2]}{3}\right]$. Но