Московский отбор на Российскую математическую олимпиаду

Избранные задачи

1. Имеются черные и белые интервалы. Сумма длин черных 1, и белых 1. Докажите, что их можно так расположить на отрезке длины 1,5, что интервалы одного цвета не пересекаются, а любые два интервала разных цветов либо не пересекаются, либо находятся один внутри другого. (9)[1]

2. Докажите, что уравнение $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=z^2+1$ имеет в натуральных числах бесконечно много решений таких, что $x>2000$, $y-x>2000$. (10)

В.Сендеров

3. Внутри равностороннего треугольника $A_1A_2A_3$ площади S_1 находится равносторонний треугольник $B_1B_2B_3$

[1] *В скобках указаны классы, в которых предлагалась задача.*

площади S_2, причем точка B_3 удалена от стороны A_1A_2 не дальше, чем точки B_1 и B_2. Обозначим через S площадь шестиугольника $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$. Докажите, что $\sqrt{S_1S_2} \le S \le 2\sqrt{S_1S_2}$. (9, 10)

В.Кириченко

4. 2^n человек хотят разыграть кубок по олимпийской системе, причем для каждой пары заранее известно, кто выигрывает. Докажите, что можно так составить расписание, что человек, выигрывающий у наибольшего числа людей (если такой есть), выиграет кубок. (10)

5. Укажите такую рациональную функцию с целыми коэффициентами, область значений которой – отрезок $\left[\sqrt{2}; 2\right]$ (функция должна быть определена на всей вещественной прямой). (11)

В.Сендеров

6. Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ продлены до пересечения в точках M и N. Из точки пересечения диагоналей O на прямую MN опущен перпендикуляр, пересекающий эту прямую в точке P. Докажите, что углы APO и OPC равны. (11)

А.Заславский

7. В некоторых клетках бесконечной клетчатой доски стоят фишки. Расстановка фишек называется почти плотной, если в каждом квадрате $n \times n$ не более $10n$ пустых клеток (для любого n). Докажите, что существует такое d, что в любой почти плотной расстановке можно заполнить все клетки, сдвинув каждую фишку на расстояние, меньшее d. (11)

М.Вялый, А.Канель

Публикацию подготовил
Г.Челноков