«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Пусть первоначально на столе лежало N конфет, и пусть первые несколько (не уточняем, сколько именно) мальчиков взяли себе в общей сложности k конфет. Тогда на столе осталось $(N-k)$ конфет. Сколько конфет получит очередной мальчик? Десятая часть остатка – это $(N-k)/10$ конфет, и еще десятая часть того, что взяли себе предыдущие мальчики, – это $k/10$ конфет. Всего это составляет $(N-k)/10 + k/10 = N/10$ конфет.

Таким образом получается, что каждый мальчик независимо от очередности получил десятую часть всех конфет. Поскольку в один прекрасный момент конфеты кончились, то мальчиков было 10. Ну, а досталось всем поровну, и никто не в обиде.

2. Дедушка прав.

Если кастрюля удерживается на столе, сдвинем ее дальше от центра стола так, чтобы центр тяжести кастрюли в точности приходился на край стола. Очевидно, что и в этом случае кастрюля еще удержится на столе. На рисунке 1 показано, что центр кастрюли находится в вершине правильного шестиугольника, вписанного в границу круглого стола. Так как радиус стола O_1O равен длине отрезков OA и OB, а диаметр кастрюли меньше диаметра стола, то край кастрюли пересекает оба эти отрезка. Сектор, высекаемый этими отрезками на дне кастрюли, по площади в точности равен $1/3$ площади дна. Можно сделать вывод, что в крайнем положении, когда кастрюля еще удержится на столе, она соприкасается с плоскостью стола по площади, большей $1/3$ площади своего дна. Значит, если бабушка поставит кастрюлю так, как она хочет, то кастрюля на столе не удержится.

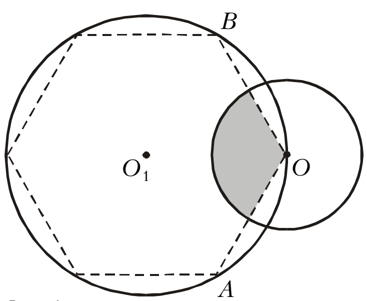

Рис. 1

3. Можно. Сто первых натуральных чисел распадаются на 50 пар так, что в каждой паре сумма чисел равна 101. Пусть среди 25 зачеркнутых чисел нашлось k полных пар, а остальные $25-2k$ из них присутствуют без парных. К этим непарным $25-2k$ числам добавим $25-2k$ чисел, дополнительных к каждому из них до пары, и зачеркнем их. Еще зачеркнем k пар чисел среди незачеркнутых – получим всего 25 полных пар чисел, что составляет половину суммы всех натуральных чисел от 1 до 100.

4. В послании зашифрована фраза: «Жил-был у бабушки серенький козлик…».

5. Если царь – лжец, а все его подданные – рыцари, гибельной могла оказаться фраза «Царь – рыцарь». Передавая ее из уст в уста, рыцари гибнут, последний же перед смертью повторяет ее царю.

Предположим, что царь на самом деле рыцарь. Если бы к тому же все его подданные были рыцарями, то все они говорили бы друг другу только правду, и никаких катаклизмов в государстве не произошло бы. Покажем, что если среди подданных имеется один лжец, то ситуация, описанная в условии задачи, реализуется. Если царь скажет лжецу: «В государстве имеется один лжец», то после произнесения этой фразы лжецом тот станет рыцарем, а сама фраза – ложной. Далее схема гибели повторяет предыдущую.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку в натуральном ряду числа, кратные 2, встречаются чаще, чем числа, кратные 5, то число нулей, которыми оканчивается факториал $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, равно количеству пятерок в разложении $n!$ на простые множители.

Пусть $n!$ – наименьший из факториалов, оканчивающийся ровно m нулями. Тогда n делится на 5 (в противном случае еще меньший факториал $(n-1)!$ оканчивался бы таким же количеством нулей). Заметим, что если n делится на 5, но не делится на $5^2 = 25$, то разложение числа $(n-1)!$ на простые множители содержало бы на одну пятерку меньше, и потому число $(n-1)!$ оканчивалось бы ровно $m-1$ нулями, что противоречит условию. Итак, n делится на 25. Но тогда число $n+5$ не делится на 25, хотя делится на 5, и, следовательно, в разложении числа $(n+5)!$ на простые множители содержится на одну пятерку больше, чем в разложении $n!$. Следовательно, факториал, оканчивающийся $m+1$ нулями, существует.

17. Из равенства $x_2+y_2+z_2 = x_1+x_2+x_3$ выразим переменную z_2 через остальные переменные: $z_2 = x_1+x_3-y_2$. Аналогично, из равенства $y_1+y_2+y_3 = x_1+y_1+z_1$ выражаем переменную $y_3 = x_1+z_1-y_2$; из равенства $y_1+y_2+y_3 = x_3+y_3+z_3$ выражаем переменную $y_1 = x_3+z_3-y_2$, а из равенства $x_2+y_2+z_2 = z_1+z_2+z_3$ – переменную $x_2 = z_1+z_3-y_2$. Воспользовавшись этими выражениями, получаем

$$\begin{aligned}
x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 &= x_1\left(z_1+z_3-y_2\right)x_3 + \\
&+ \left(x_3+z_3-y_2\right)y_2\left(x_1+z_1-y_2\right) + z_1\left(x_1+x_3-y_2\right)z_3 = \\
&= x_1z_1x_3 + x_1z_3x_3 - x_1y_2x_3 + x_3y_2x_1 - x_3y_2^2 + x_3y_2z_1 + \\
&+ z_3y_2x_1 - z_3y_2^2 + z_3y_2z_1 - y_2^2x_1 + y_2^3 - \\
&- y_2^2z_1 + z_1x_1z_3 + z_1x_3z_3 - z_1y_2z_3 = x_1\left(x_3+z_3-y_2\right)z_1 + \\
&+ \left(z_1+z_3-y_2\right)y_2\left(x_1+x_3-y_2\right) + \\
&+ x_3\left(x_1-y_2+z_1\right)z_3 = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3.
\end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned}
\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0 &\Rightarrow 5b^2 > a^2 \Rightarrow 5b^2 \ge a^2 + 1 = \\
&= a^2 + 2a\cdot\frac{1}{4a} + \frac{1}{2} > a^2 + 2a\cdot\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = \\
&= \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 \Rightarrow 5 > \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}.
\end{aligned}$$

19. Обезьянка Чита, начиная вытаскивать орехи первой, при правильной стратегии Чи-Чи получит меньшую добычу. Чи-Чи, например, может действовать так.

Если Чита первым ходом вытаскивает 1 орех, Чи-Чи следом вытаскивает 12 орехов и в дальнейшем обеспечивает себе победу (большее количество орехов). Если Чита первым ходом вытаскивает 5 орехов, то Чи-Чи следующим ходом вытаскивает один орех. Поскольку после этого в куче останется 19 орехов, то Чита следующим ходом сможет вытащить только один орех, зато Чи-Чи следом – 9. На данном этапе у Читы 6 орехов, у Чи-Чи – 10, в куче осталось 9. Если далее Чита вытаскивает 3 ореха, то Чи-Чи – тоже 3 ореха, если же Чита вытаскивает 1 орех, то Чи-Чи – 4 ореха. В любом из этих двух случаев Чи-Чи обеспечивает себе победу.

20. Угол $\angle C_1A_1B_1$ дополняет углы $\angle C_1A_1B$ и $\angle B_1A_1C$ до развернутого угла, поэтому он равен углу $\angle C_1AB_1$, который вместе с углами $\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$ и $\angle C_1B_1A = \angle C_1A_1B$ состав-

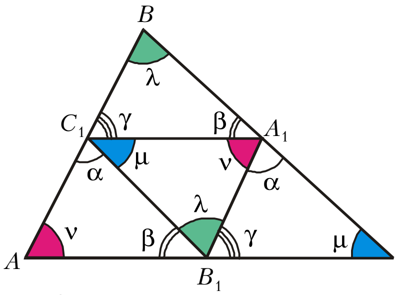

Рис. 2

ляет объединение внутренних углов треугольника AC_1B_1. Аналогично $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$; $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1BA_1$. Привлекая эти факты, а также условие задачи, введем обозначения углов, как показано на рисунке 2.

Из равенства сумм внутренних углов треугольников AC_1B_1 и ABC получаем

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu. \qquad (1)$$

Сравнивая сумму углов треугольника ABC с аналогичными суммами углов треугольников A_1BC_1, A_1B_1C, получаем

$$\beta + \gamma = \mu + \nu, \qquad (2)$$

$$\alpha + \gamma = \lambda + \nu. \qquad (3)$$

Складывая равенства (1), (2), (3) и учитывая, что $\lambda + \mu + \nu = 180°$, отсюда выводим $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Сравнивая последнее равенство с каждым из равенств

$$\alpha + \beta + \nu = 180°, \quad \alpha + \gamma + \mu = 180°, \quad \beta + \gamma + \lambda = 180°,$$

выражающих суммы внутренних углов соответствующих треугольников, получаем $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, $\gamma = \nu$. Следовательно, $A_1B_1 \| AB$; $A_1C_1 \| AC$; $B_1C_1 \| BC$. В параллелограммах $AC_1A_1B_1$, $B_1C_1A_1C$ противоположные стороны равны: $AB_1 = C_1A_1$; $B_1C = C_1A_1$, отсюда $AB_1 = B_1C$, т.е. точка B – середина стороны AC. Аналогично доказывается, что точка A_1 – середина стороны BC, а точка C_1 – середина стороны AB.

Очень важный вопрос

Если t – время от начала движения до первой встречи Винни-Пуха и Пятачка, то, обозначив через a расстояние между их домами и через x путь, пройденный Винни-Пухом, получим, что Винни-Пух шел со скоростью x/t, а Пятачок – со скоростью $(a-x)/t$. Оставшийся путь $(a-x)$ Винни-Пух прошел за 1 минуту, т.е. его скорость равнялась $(a-x)/1$, а Пятачок прошел оставшийся путь длиной x за 4 минуты и его скорость составила $x/4$. Но так как их скорости не изменились, то $\frac{x}{t} = \frac{a-x}{1}$ и $\frac{a-x}{t} = \frac{x}{4}$, или $\frac{x}{a-x} = \frac{t}{1}$ и $\frac{x}{a-x} = \frac{4}{t}$. Так как левые части этих уравнений равны, то равны и правые: $\frac{t}{1} = \frac{4}{t}$. Отсюда $t^2 = 4$, $t = 2$. Итак, до встречи Винни-Пух и Пятачок шли 2 минуты; значит, всего Винни-Пух шел 3 минуты, а Пятачок — 6 минут.

Несколько задач для 11-классников

Вариант 1

1. а) $a = 8$, $x = \sqrt{5} - 2$. б) $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty)$. в) $a < 0$; $a = \frac{27}{4}$. *Указание.* Постройте график функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x}$ при $x > -1$. г) Наименьшее значение функции $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{x}$ на луче $(0; +\infty)$ равно $n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > ne$.

2. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $[0; 2] \cup [2n-1; 2n]$, где $n \ge 2$ или $n \le -1$ (случаи $a = 0$; ± 1 надо рассмотреть отдельно). в) $\frac{\pi}{4}$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $f(x) \le \sin x < \cos x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. г) $\left[1; \frac{5}{3}\right]$. Поскольку множитель $\sin ax$ не должен обращаться в нуль на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $|a| < 4$. Теперь оценки $1 \le a \le \frac{5}{3}$ следуют из того, что исходное неравенство должно быть верным при $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Осталось показать, что для любого $a \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$ неравенство $\sin ax \sin x \ge \frac{1}{2}$ верно для всех $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, что требует дополнительного рассуждения, в котором полезно использовать то, что функция $y = 2\left(2z^2 - 1\right)^2$ – выпуклая.

3А. а) Два корня. *Указание.* Покажите, что функция $f(x) = ax^{1998} - cx^{1917} + b - d$ имеет не более одной точки экстремума. б) $x = 1$. в) $a \in \boldsymbol{Z}$, $d = 0$. *Указание.* Пусть $an^{1998} = s(n)\left(n^{1917} + d\right)$, где $s(n)$ – целое. Ясно, что $s(n) \le Mn^{81}$. Перейдем теперь к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $an^{81} - s(n) = ds(n)n^{-1917}$. Число, стоящее в его левой части – целое, между тем его правая часть стремится к нулю. Значит, $d = 0$. г) $(a, b, c) = (71k, 3k, 74k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (см. задачу 8 в статье).

3Б. См. задачу 7 в статье.

3В. а) -1, $-i$, $1 + i$. б) $b = 0$, a – любое. *Указание.* Проще всего воспользоваться формулами Виета. в) $a = 0$, $b \ne 0$. *Указание.* Так как $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то из условия, что эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольника, следует, что они являются корнями уравнения $z^3 = b_1$. Следовательно, они суть и корни уравнения $az + b + b_1 = 0$, которое тем самым имеет по крайней три различных корня. г) *Указание.* Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда

$$|p(z)|^2 = 1 + |a|^2 + |b|^2 + \left(a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi\right) +$$
$$+ \left(b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi\right) + \left(a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z}\right) \ge$$
$$\ge 1 + \left(a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi\right) + \left(b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi\right).$$

Осталось показать, что если $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \ne 0$, то найдется такое решение системы неравенств

$$\begin{cases} a_1\cos 2\varphi + a_2\sin 2\varphi \ge 0, \\ b_1\cos 3\varphi + b_2\sin 3\varphi \ge 0, \end{cases}$$

на котором одно из неравенств системы является строгим.

Вариант 2

1. б) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ (см. решение задачи 2 в статье). в) *Указание.* Так как $D_1 + D_2 = p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \ge 2p_1p_2 - 4(q_1 + q_2) = 0$, то хотя бы один из дискриминантов неотрицателен.

2. а) См. рис. 3. Функция $y = \log_2 x + 2x$ – возрастающая и ее нуль – $x = \frac{1}{2}$.

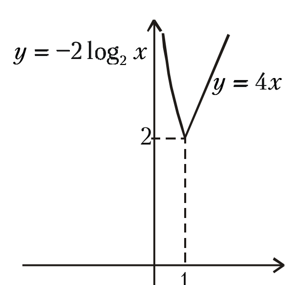

Рис. 3

б) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

в) См. задачу 5 в статье. г) Да, достаточно (см. задачу 3 в статье).

3. а) *Указание.* Нетрудно видеть, что данное равенство равносильно тому, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

б) *Указание.* Искомое множество есть объединение биссектрис координатных углов. в) $\frac{\pi}{2}$. *Указание.* Докажите по индукции, что сумма первых n слагаемых в данной бесконечной сумме равна $\operatorname{arctg} n$.

4. а, б) $\frac{1}{12}\sqrt{3}$. *Указание.* Учтите, что имеются два различных варианта расположения единичных ребер! в) См. задачу 6 в статье.

Разные задачи

1. а) $(x, y) = (1998, 0); (0, 1998); (888, 222); (222, 888)$. *Указание.* Из равенства $\sqrt{y} = \sqrt{1998} - \sqrt{x}$ получаем, что $y = 1998 + x - 2\sqrt{1998x}$, откуда следует, что число $1998x$ должно быть полным квадратом. б) $(x, y, z) = (222, 222, 222)$. *Указание.* Докажите вначале следующее утверждение.
Лемма. Если $a, b, u, v \in \mathbf{N}$ и $a\sqrt{u} + b\sqrt{v} \in \mathbf{N}$, то $\sqrt{u}$, $\sqrt{v} \in \mathbf{N}$.

2. а) Только равносторонние треугольники. б) *Указание.* Решение очевидно, если использовать такое «геометрически очевидное» утверждение. Если $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ и $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \ge a_n$, то существует замкнутая выпуклая ломаная, длины звеньев которой равны a_i. Попробуйте дать какое-нибудь обоснование этого утверждения. в) Квадраты и только они. *Указание.* Нетрудно видеть, что если углы четырехугольника образуют арифметическую прогрессию, то он – трапеция. Далее, если и длины его сторон образуют арифметическую прогрессию, то $KD = |CD - CK|$ (обозначения на рисунке 4, отрезок CK параллелен стороне AB), откуда следует, что $K = D$, т.е. этот четырехугольник является прямоугольником.

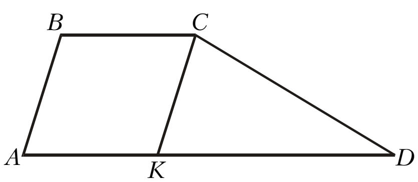

Рис. 4

Задачи с проводящими сферами

1. $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$; уменьшится на $\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$.

2. $q_1 = -q\dfrac{\dfrac{R_2}{R} - 1}{\dfrac{R_2}{R_1} - 1}$, $q_2 = -q\dfrac{1 - \dfrac{R_1}{R}}{1 - \dfrac{R_1}{R_2}}$.

3. $Q = -q\frac{R}{l}$ при $l > R$, $Q = -q$ при $l < R$.

4. $Q = -\left(q_1 + q_2\frac{R}{l_2}\right)$. **5.** $Q_R = -\frac{q}{4}$, $Q_{3R} = \frac{q}{4}$.

LXII Московская математическая олимпиада

ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА

6 класс

1. *Ответ*: изначально было отмечено 15 точек. Если (до уплотнения) было отмечено n точек, то после уплотнения будет отмечено $2n - 1$ точек (из которых n старых и $n - 1$ новая). Следовательно, число точек до уплотнения можно найти, прибавив к числу точек после уплотнения единицу и поделив пополам. Таким образом, до последнего уплотнения было $(113 + 1)/2 = 57$ точек, до второго – $(57 + 1)/2 = 29$ точек и в самом начале – $(29 + 1)/2 = 15$ точек.

2. Для начала разложим 420 на множители:

$$420 = 6 \cdot 7 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Теперь уже несложно сгруппировать эти множители в пять групп так, чтобы в сумме получилось 20:

$$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 420;\ 7 + 5 + 3 + 4 + 1 = 20.$$

3. Заметим для начала, что белых клеток должно быть втрое больше черных, так что белых будет 12, а черных –4. После этого легко нарисовать требуемую картинку (рис.5).

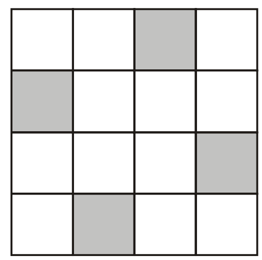
Рис. 5

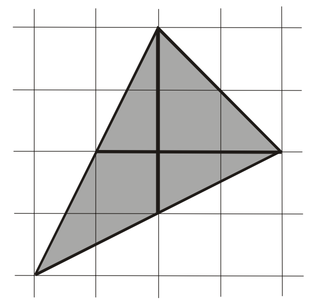
Рис. 6

4. Вертолет летит на юг по московскому меридиану, затем по параллели, потом снова по меридиану на север, а затем по более северной параллели. Так как все меридианы одинаковы, широта вертолета не изменится (сколько градусов он пролетел на юг, столько же он пролетит и на север). А параллели разные: чем севернее, тем короче, так что на северной параллели те же 300 км составят большее число градусов. Значит, вертолет окажется восточнее Москвы на той же широте.

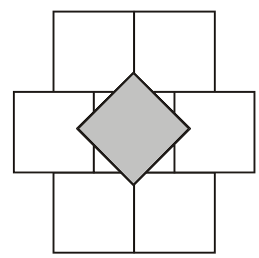
Рис. 7

5. Удобно сначала нарисовать перпендикулярные медианы треугольника, а потом уже вершины. На рисунке 6 показан один из возможных вариантов.

6. См. рис.7.

7 класс

1. *Ответ*: $25/76$. Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше ее знаменатель – и тем больше сама дробь. Видно, что $25/76$ еще меньше $1/3$, а $26/75$ – уже больше.

2. См. рис.8.

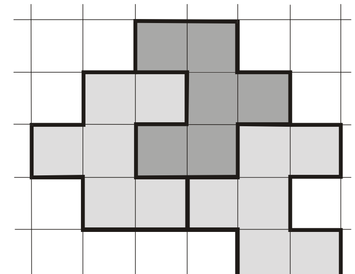
Рис. 8

4. *Ответ*: рассвет был в 6 часов утра.

6. См. задачу 4 раздела «Квант» для младших школьников» в этом номере журнала.

8 класс

1. Рассмотрим числа

$$1 - x = \frac{1}{111111},\ 1 - y = \frac{2}{222223},\ 1 - z = \frac{3}{333334},$$

а также обратные к ним

$$\frac{1}{1-x} = 111111\,,\quad \frac{1}{1-y} = 111111\frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{1-z} = 111111\frac{1}{3}\,.$$

Мы видим, что $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-z} < \frac{1}{1-y}$. Поскольку все рассматриваемые числа положительны, $1-x > 1-z > 1-y$. Следовательно, $x < z < y$.

2. См. задачу М1691 «Задачника «Кванта».

3. Предположим, что $ab = cd$. Тогда

$$a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$c^2 + 2ab + d^2 = c^2 + 2cd + d^2 = (c+d)^2.$$

Таким образом, достаточно найти четыре различных натуральных числа a, b, c и d, для которых $ab = cd$. Для этого найдем число n, разлагающееся в произведение двух множителей различными способами. Например, таким числом является $n = 6$; в этом случае можно взять $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 3$.

4. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, – это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500 - 300 = 200$, $200 + 198 = 398$, $398 - 300 = 98$, $98 + 198 = 296$, $296 + 198 = 494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

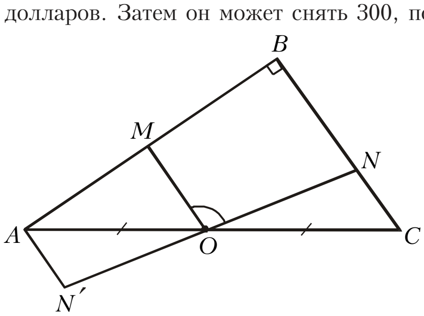

Рис. 9

5. Рассмотрим поворот на 180° по часовой стрелке вокруг центра O (рис.9). При этом повороте треугольник ONC перейдет в треугольник $ON'A$. Рассмотрим четырехугольник $MAN'O$; в нем углы MAN' и MON' прямые. В самом деле, $\angle MAN' = \angle BAC + \angle BCA$, а $\angle MON' = \angle MOA + \angle NOC = 180° - \angle MON$. Следовательно, $MN'^2 = AM^2 + AN'^2 = OM^2 + ON'^2$. Далее, $ON' = ON$, $OM^2 + ON^2 = MN^2$. С другой стороны, $AN' = CN$ – и требуемое равенство доказано.

6. Всего в турнире были сыграны $n(n-1)$ партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов участники набрали по $n-1$ очку. Каждый шахматист сыграл белыми $n-1$ партию, и количество выигранных им партий белыми равно одному из n чисел: 0, …, $n-1$.

Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 до $n-1$. Рассмотрим двух участников турнира: A, выигравшего $n-1$ партию белыми, и B, не выигравшего ни одной такой партии. Разберемся, каким мог быть результат партии, которую A играл против B черными. С одной стороны, A набрал $n-1$ очко, играя белыми, так что все свои партии черными, в том числе и эту, он должен был проиграть. Но B не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Противоречие.

9 класс

1. Произведение чисел на доске не меняется. Действительно, $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = ab$. Поэтому искомое произведение равно 2.

2. *Ответ*: да. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером $n > 1000$ он делает так:

1) если на n-м и $(2000-n)$-м местах стоят одинаковые буквы – ничего не делает;

2) если на этих местах – разные буквы, то одна из них не совпадает с той, которая стоит на 1000-м месте. Второй игрок меняет ее с 1000-й буквой.

3. См. задачу М1677 «Задачника «Кванта».

4. *Ответ*: $k = 2$.

Обозначим $n = 1000$. Имеем два случая:

1) $k > 1000$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1} = 10^{n+1}\cdot\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\,\underbrace{2\ldots2}_{k-(n+1)}\,.$$

Очевидно, что это число не является квадратом натурального: n четно, поэтому в разложение числа входит нечетное число пятерок.

2) $k \le 1000$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1} = \underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\underbrace{0\ldots0}_{k} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}\underbrace{0\ldots0}_{k} = 10^k\left(\underbrace{1\ldots1}_{2n-k} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}\right).$$

Получили: $k = 2l$, и достаточно найти все такие $l < n$, что число $A = \underbrace{1\ldots1}_{2n-2l} - \underbrace{2\ldots2}_{n+1-2l}$ – полный квадрат.

Заметим, что число x является полным квадратом в точности тогда, когда и $9x$. Имеем:

$$9A = \underbrace{9\ldots9}_{2n-2l} - 1\underbrace{9\ldots9}_{n-2l}8 = \underbrace{9\ldots9}_{n-2}8\underbrace{0\ldots0}_{n-2l}1\,.$$

«Близкий» к числу $9A$ полный квадрат – число $B = \left(10^{n-l}\right)^2$. Очевидно, $B > 9A$. Очевидно также, что при $Y > Z$ будет $Y^2 - Z^2 \ge Y^2 - (Y-1)^2 = 2Y - 1$. А теперь найдем разность $B - 9A$:

$$10^{2n-2l} - 9\ldots980\ldots01 = 1\underbrace{9\ldots9}_{n-2l+1} = 2\cdot10^{n-2l+1} - 1\,.$$

Ясно, что $2\cdot10^{n-2l+1} - 1 \le 2\cdot10^{n-l} - 1$, причем равенство имеет место в точности при $l = 1$, откуда сразу и получается ответ задачи.

5. Будем считать, что R лежит на AC, S – на BC. Тогда

$$RQ = RC - QC = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Поскольку треугольники AQP и RQT подобны, а треугольник AQP равнобедренный, то $RQ = RT$. Следовательно,

$$ST = RS - RT = RS - RQ = \frac{c}{2} - \frac{c-a}{2} = \frac{a}{2} = BS\,.$$

Отсюда треугольник TSB равнобедренный и $\angle SBT = \angle STB = \angle TBA$, а BT – биссектриса угла B треугольника ABC.

6. б) Укажем для каждого вида соревнования спортсмена, который выбывает в этом виде, и назовем его «отмеченным». Построение индуктивное.

Для первого вида соревнования – это самый слабый в первом виде: a_1. Обозначим $A_1 = \{a_1\}$.

Пусть уже построено множество $A_k = \{a_1,\ldots,a_k\}$ спортсменов такое, что a_i выбывает в i-м виде соревнования. Обозначим через a_{k+1} спортсмена, который в $(k+1)$-м виде соревнования слабее всех спортсменов, не входящих в множество $A_k = \{a_1,\ldots,a_k\}$. Докажем, что a_{k+1} выбывает при любом порядке соревнований не позднее $(k+1)$-го вида соревнования.

Для доказательства опять прибегнем к индукции. Пусть соревнование при новом порядке соревнований проводится первым. Поскольку при любом натуральном k будет $2^{k-1} \ge k$, то «отмеченный» в этом соревновании спортсмен попадает в более слабую половину его участников и выбывает.

Пусть при всех $m > s \geq 0$ «привязанные» к соревнованиям с новыми номерами $n - m$ спортсмены выбывают не позднее этих соревнований. Рассмотрим соревнование с новым номером $n - s$. По предположению индукции, к этому соревнованию уцелели не более $s + 1$ «отмеченных» спортсменов. С другой стороны, 2^s самых слабых участников этого вида соревнования выбывают в результате его проведения. Поскольку $2^s \geq s + 1$, то «отмеченный» в этом соревновании спортсмен, если он при новом порядке до этого соревнования и дожил, попадает в более слабую половину и выбывает.

в) Пример построим по индукции. Пусть есть n видов соревнований, перенумерованных числами от 1 до n. Возьмем две группы A и B по 2^{n-1} спортсменов такие, что группа B дает пример соревнования в видах соревнований с 1-го по $(n-1)$-й с $2^{n-1} - n + 1$ возможными победителями. (Такое возможно по предположению индукции.) Пусть в этих $n - 1$ видах любой спортсмен из A сильнее любого из B, а в n-м виде соревнования любой спортсмен из B сильнее любого из A.

Если провести n-й вид соревнований первым, то останутся только спортсмены из B, из которых перестановками остальных видов соревнований можно $2^{n-1} - n + 1$ спортсменов сделать победителями.

В противном случае, т.е. после любого иного первого тура, останутся только спортсмены из группы A, которые будут соревноваться далее в каких-либо $n - 1$ из n видов соревнований. Докажем (опять по индукции), что в таких условиях можно сделать победителями $2^{n-1} - 1$ спортсменов, причем есть такой порядок соревнований, при котором единственный аутсайдер (не «возможный победитель») выходит в финал. (*)

База очевидна: $n = 2$. Пусть есть пример n соревнований с 2^{n-1} участниками, удовлетворяющий (*).

Опять берем две группы по 2^{n-1} спортсменов, при этом любой спортсмен из A сильнее любого из B в соревнованиях с 1-го до n-го, а в $(n+1)$-м – наоборот. Соревнования с 1-го по n-е организуем так, чтобы и в группе A, и в группе B можно было сделать победителями по $2^{n-1} - 1$ спортсменов. Единственный аутсайдер в A – самый сильный в $(n+1)$-м виде соревнования. Проводя первым $(n+1)$-й вид соревнований, получим $2^{n-1} - 1$ возможных победителей из B, причем при некотором порядке соревнований аутсайдер выйдет в финал (по индуктивному предположению). Если вообще не проводить $(n+1)$-й вид соревнования, то в первом туре (каков бы он ни был) вылетают все из B, а далее можно сделать победителями $2^{n-1} - 1$ из A. Осталось объяснить, как сделать победителем аутсайдера в A. Для этого мы первым проводим тот вид соревнования, который является финальным при порядке, обеспечивающем выход аутсайдера в финал. После этого остались только спортсмены из A. Далее проводим соревнования в таком порядке, который обеспечивает выход аутсайдера из A в финал, а завершаем $(n+1)$-м видом соревнования. В нем аутсайдер побеждает.

10 класс

1. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + ac$. Из условия следует, что $f(c) = c^2 + bc + ac = (a + b + c)c < 0$. В точке c функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, следовательно, парабола $y = f(x)$ пересекает ось Ox в двух точках, т.е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трехчлена положителен: $b^2 - 4ac > 0$.

2. См. задачу М1693 «Задачника «Кванта».

3. *Ответ*: (1, 1).

Докажем вначале, что x и y взаимно просты. Предположим противное. Тогда x и y делятся на некоторое простое число p; пусть p входит в разложения на простые множители чисел x и y соответственно в степенях $a \geq 1$ и $b \geq 1$, положим для определенности $a \geq b$. Тогда максимальная степень p, на которую делится $x^3 + y$, равна b (поскольку x^3 делится на p^{3a} и тем более на p^{b+1}, а y делится на p^b и не делится на p^{b+1}). Но $x^2 + y^2$ делится на p^{2b}, следовательно, $x^3 + y$ не может делиться на $x^2 + y^2$. Это противоречие доказывает, что x и y взаимно просты.

Далее, из условия следует, что число $\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^3 + y\right) = y(xy - 1)$ делится на $x^2 + y^2$. Заметим, что y и $x^2 + y^2$ не имеют общего множителя, большего 1 (так как x и y взаимно просты), значит, $xy - 1$ делится на $x^2 + y^2$. Но если $xy > 1$, то это невозможно, так как $x^2 + y^2 \geq 2xy > xy - 1$.

4. См. задачу М1684 «Задачника «Кванта».

5. Пусть f: $[0; 1] \to [0; 1]$, $f(x) = x/\sqrt{3}$ и g: $[0; 1] \to [0; 1]$, $g(x) = 1 - (1 - x)/\sqrt{3}$ – функции, отвечающие прыжкам кузнечика. Область значений f – отрезок $\left[0; 1/\sqrt{3}\right]$, область значений g – отрезок $\left[1 - 1/\sqrt{3}; 1\right]$. Каждый из этих отрезков имеет длину $1/\sqrt{3}$, и вместе они покрывают отрезок $[0; 1]$.

Пусть n – некоторое натуральное число. Рассмотрим всевозможные функции $h_1(h_2(\ldots(h_n(x))\ldots))$: $[0; 1] \to [0; 1]$, где каждая функция h_i – либо f, либо g. Легко видеть, что область значений каждой из этих функций есть отрезок длины $\left(1/\sqrt{3}\right)^n$. Докажем индукцией по n, что эти отрезки покрывают отрезок $[0; 1]$. Для $n = 1$ это утверждение уже проверено. Предположим, что области значений всевозможных функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(x))\ldots))$ покрывают отрезок $[0; 1]$. Фиксируем любую из функций $h_1(h_2(\ldots(h_{k-1}(x))\ldots))$. Область значений этой функции покрывается областями значений функций $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_{k-1}(f(x))\right)\ldots\right)\right)$ и $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_{k-1}(g(x))\right)\ldots\right)\right)$. Тем самым утверждение доказано.

Пусть теперь на отрезке $[0; 1]$ выбрана точка a. Рассмотрим интервал $(a - 0{,}01;\ a + 0{,}01)$ и покажем, что кузнечик сможет в него попасть. Выберем n столь большим, чтобы было выполнено неравенство $\left(1/\sqrt{3}\right)^n < 0{,}01$. По доказанному, можно выбрать такую функцию $h_1(h_2(\ldots(h_n(x))\ldots))$, что точка a принадлежит области ее значений. Тогда вся область значений рассматриваемой функции (отрезок длины $\left(1/\sqrt{3}\right)^n$) лежит внутри интервала $(a - 0{,}01;\ a + 0{,}01)$. Это означает, что из любой точки отрезка $[0; 1]$ кузнечик попадет внутрь интервала $(a - 0{,}01;\ a + 0{,}01)$, выполнив последовательно прыжки, соответствующие функциям $h_n, h_{n-1}, \ldots, h_1$.

6. *Ответ*: расстановка на рисунке 10 (или получающаяся из нее поворотом либо осевой симметрией).

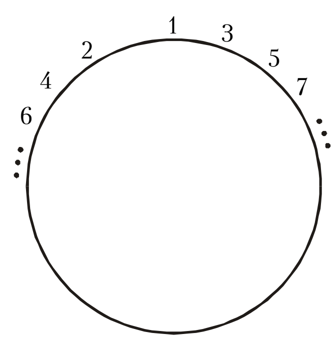

Рис. 10

Лемма. Пусть по окружности расставлены 1999 различных положительных чисел a_1, a_2, …, a_{1999} и пусть $a_1 > a_{1998}$. Рассмотрим следующую операцию: числа a_i и a_{1999-i}, где $i = 1, 2, \ldots, 999$, меняем местами, если $a_i < a_{1999-i}$, и не меняем в противном случае. Если хотя бы одна пара чисел поменялась местами, то сумма произведений десяток чисел, идущих подряд, увеличилась.

Доказательство леммы. Рассмотрим симметричные группы по 10 чисел a_i, …, a_{i+9} и a_{1999-i}, …, a_{1990-i}. Пусть z – произведение чисел, содержащихся одновременно и в первой, и во второй группе (произведение нулевого числа сомножителей считается равным единице); x и x' – произведения чисел, содержащихся, соответственно, только в первой и только во второй группе, оставшихся на своем месте после проведения операции; y и y' – произведения чисел, содержащихся, соответственно, только в первой и только во второй группе, поменявшихся местами в результате операции. Тогда сумма произведений чисел в рассматриваемых двух группах до операции равна $s_1 = zxy + zx'y'$, а после операции $s_2 = zxy' + zx'y$. Имеем: $s_1 - s_2 = z(x - x')(y - y')$. Нетрудно видеть, что эта разность неположительна. Кроме того, если в результате операции не все числа остались на своих местах, то хотя бы для одной пары симметричных групп из 10 чисел эта разность строго отрицательна, что и доказывает лемму.

Решение задачи. Считаем числа 1, 2, …, 1999 расставленными так, что дуги между соседними числами равны. Пусть числа расставлены оптимальным образом, т.е. так, что сумма произведений десяток соседних чисел максимальна. Проведем диаметр через одно из чисел. Из леммы следует, что для всех пар чисел, симметричных относительно этого диаметра, меньшие числа расположены на одной полуокружности, а большие – на другой. С точностью до поворотов и осевых симметрий существует единственная расстановка чисел, обладающая этим свойством. Действительно, число 2 должно быть рядом с числом 1. Иначе найдется диаметр, отделяющий 2 от 1, причем числа 1 и 2 не симметричны относительно этого диаметра. Обозначим числа, симметричные числам 1 и 2 относительно этого диаметра, соответственно через A и B. Тогда $A > 1$ и $2 < B$, что противоречит лемме.

Далее строим искомую расстановку по индукции. Пусть мы доказали, что числа 1, 2, …, $2k$ при $1 \le k \le 998$ расставлены как в ответе, т.е. в порядке (для определенности по часовой стрелке) $2k$, $2k-2$, …, 2, 1, 3, …, $2k-1$ подряд. Обозначим через A и B, соответственно, числа, следующие за $2k$ против часовой стрелки и за $2k-1$ по часовой стрелке. Предположим, что число $2k+1$ отлично от A и B. Тогда пусть C – следующее за $2k+1$ по часовой стрелке число. C отлично от 1, 2, …, $2k$. Числа C и $2k-1$, а также $2k+1$ и B симметричны относительно некоторого диаметра, но $C > 2k - 1$, а $2k+1 < B$ – это противоречие. Предположим теперь, что число $2k+2$ отлично от A и B. Тогда пусть C – следующее за $2k+2$ по часовой стрелке число, D – следующее за $2k+2$ против часовой стрелки число. Пусть $A \ne 2k+1$. Тогда $2k+2 < A$, но $D > 2k$ – это противоречит лемме. Если же $A = 2k+1$, то $B \ne 2k+1$ и получаем аналогичное противоречие ($2k+2 < B$, но $C > 2k-1$). Таким образом, получаем, что либо $A = 2k+1$ и $B = 2k+2$, либо $A = 2k+2$ и $B = 2k+1$. Нетрудно видеть, что лемме не противоречит только второй случай. Это завершает доказательство индукционного перехода.

11 класс

1. См. задачу М1692 «Задачника «Кванта».

2. а) Достаточно провести прямую через середину дуги и середину ломаной BAD.

б) Пусть A – вершина угла, B и D – концы дуги, C – ее середина. Сегменты, опирающиеся на хорды BC и CD, равны. Поэтому достаточно провести через точку C прямую, которая делит пополам площадь четырехугольника $ABCD$.

Проведем через середину диагонали BD прямую l, параллельную AC. Пусть, для определенности, l пересекает отрезок AB (случай пересечения l с отрезком AD рассматривается аналогично). Обозначим $E = l \cap AB$; прямая CE – искомая. Это видно из рассмотрения площадей треугольников ACD, ACE и ACB (с общим основанием AC).

3. См. задачу М1695 «Задачника «Кванта».

4. Нужно доказать следующее утверждение. Пусть каждая сторона квадрата имеет длину 1 и разделена на 2^n равных частей ($n \ge 0$), а через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Тогда кузнечик сможет попасть в любую из 4^n полученных клеток.

При $n = 0$ факт тривиален. Проведем индуктивный переход от n к $n+1$. Рассмотрим какую-то из клеток размера 4^{-n-1}. Выберем самую близкую к ней вершину исходного квадрата и выполним гомотетию с центром в этой вершине и с коэффициентом 2. Тогда выбранная клетка перейдет в одну из клеток размера 4^{-n}. По предположению индукции, кузнечик может в нее попасть. Если он прыгнет теперь на половину расстояния до указанной вершины, то он попадет в нужную клетку.

5. Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем от 1 до k. Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней k цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Аналогично, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, перекрасим в цвет 2, и т.д. вплоть до последнего цвета.

После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета k. Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета $k-1$. Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе ее первоначальный цвет был бы k и она не могла бы соседствовать с вершиной того же цвета. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета $k-2$, и т.д. Продолжая этот процесс, построим путь из вершин k цветов, которые не были перекрашены.

6. Единственное решение уравнения: $n = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$. Докажем это.

Пусть p – простой множитель l. Поскольку $n^m = (1+n^k)^l - 1$, то n^m делится на $(1+n^k)^p - 1$. Но это выражение равно $n^k \cdot p + n^{2k} \cdot p(p-1)/2 + n^{3k} \cdot r$, где r – неотрицательное целое число. Разделив на n^k, получим $p + n^k \cdot p(p-1)/2 + n^{2k} \cdot r$. Если n не делится на p, то это выражение взаимно просто с n, и n^m не может на него делиться. Значит, p – делитель n. Тогда $1 + n^k \cdot (p-1)/2 + (n^{2k}/p) \cdot r$ – натуральное число, большее единицы. Если $k > 1$ или p нечетно, то второе слагаемое делится на n (третье делится всегда), сумма взаимно проста с n, и n^m не может на нее делиться. Следовательно, $k = 1$ и l имеет вид 2^s.

Вспомним теперь, что $n^m = (1+n^k)^l - 1 = (1+n)^l - 1 = ln + \ldots$ В правой части все члены, начиная со второго, делятся на n^2. Из этого, поскольку $m > 1$, следует, что l делится на n. Значит, n, как и l, является степенью двойки. Но

$$(1+n)^l - 1 = \left[(1+n)^{l/2} + 1\right] \cdot \left[(1+n)^{l/2} - 1\right] = \left[(1+n)^{l/2} + 1\right] \ldots (n+2)n,$$

откуда $n+2$ также является степенью двойки. Следовательно, $n = 2$. Множитель разложения, предшествующий $n+2 = 4$, равнялся бы $3^2 + 1 = 10$ и не был бы степенью двойки. Значит, $l = 2$, откуда $m = 3$.

7. Рассмотрим окружность длины 1 как отрезок [0; 1] с отождествленными концами. Тогда дробную часть f числа $k \cdot \lg 2$ можно рассматривать как точку этой окружности. Первая цифра числа 2^k управляется положением f относительно точек деления $0, \lg 2, \ldots, \lg 9$. (Например, если 2^k начинается с 7, то $7 \cdot 10^s < 2^k < 8 \cdot 10^s$ для натурального s. Дробная часть числа $k \cdot \lg 2$ равна $k \cdot \lg 2 - s$, и она находится между $\lg 7$ и $\lg 8$.)

Предположим, что первые цифры чисел 2^{2^n} повторяются с периодом k. Тогда при любом n дробные части чисел $2^n \cdot \lg 2$ и $2^{n+k} \cdot \lg 2$ попадают в один и тот же интервал окружности; длина любого из этих интервалов не превосходит $\lg 2 < \frac{1}{3}$.

Пусть на окружности отложены дробные части двух положительных чисел A и B; эти дробные части различны и не являются диаметрально удаленными точками окружности; длина меньшей из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, равна x. Тогда, как легко показать непосредственно, длина одной из дуг, соединяющих дробные части чисел $2A$ и

$2B$, равна $2x$. Пусть теперь дробные части чисел A и B лежат в одном интервале; рассмотрим пары $2A$ и $2B$, $4A$ и $4B$ и т.д. Из сказанного выше следует, что на некотором шаге одна из дуг, соединяющих дробные части пары, станет больше $\frac{1}{3}$, но меньше $\frac{2}{3}$. Значит, эти дробные части принадлежат разным интервалам окружности.

Применяя эти рассуждения к числам $A = 2^{n_0} \cdot \lg 2$ и $B = 2^{n_0+k} \cdot \lg 2$, где n_0 – некоторое фиксированное натуральное число, получаем противоречие с предположением о периодичности.

Избранные задачи Московской физической олимпиады 1999 года

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Пусть после того, как на поршень массой M_1 положили груз массой m, этот поршень опустился на Δh_1, а второй поршень поднялся на Δh_2 относительно начального положения. При этом перепад уровней жидкости в сосудах будет равен $\Delta h_1 + \Delta h_2$, а разность давлений, создаваемая этим перепадом, будет компенсироваться добавочным давлением, которое создает груз массой m, лежащий на первом поршне:

$$\rho g(\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{mg}{S_1},$$

где S_1 – площадь первого поршня. Так как объем жидкости под поршнями не изменился, справедливо соотношение

$$S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2,$$

где S_2 – площадь второго поршня. Из этих уравнений получаем

$$\Delta h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)} = h.$$

Пусть теперь груз положили на поршень массой M_2. Проводя аналогичные рассуждения, можно честно найти высоту, на которую при этом поднимется поршень массой M_1. Однако, зная выражение для Δh_2, ответ можно просто угадать. Действительно, в рассматриваемой системе все равно, какой поршень считать «первым», а какой – «вторым». Значит, для того чтобы получить ответ, можно просто перенумеровать все величины в последней формуле, т.е. заменить все индексы «1» на индексы «2» и наоборот. В итоге получим

$$\Delta h_1' = \frac{m}{\rho(S_2 + S_1)} = \Delta h_2 = h,$$

т.е. поршень массой M_1 поднимется относительно начального положения на ту же самую высоту h.

2. Прежде всего нужно придумать модель, которую можно применить для описания процесса охлаждения кофе при помощи мороженого. Предположим, что мороженое по своим свойствам близко ко льду и что для охлаждения кофе до требуемой температуры в него нужно будет положить мороженое ложечкой несколько раз. Будем считать, что при соприкосновении с мороженым ложечка охлаждается до температуры брикета, а при опускании в кофе – нагревается до температуры напитка. Теперь можно пытаться решить задачу «в лоб», определяя температуру кофе после погружения в него каждой очередной порции. Однако в задаче не спрашивается, сколько ложек мороженого нужно положить в кофе, а требуется лишь оценить необходимую массу мороженого. Поэтому сначала решим задачу в первом приближении.

Запишем уравнение теплового баланса для системы, состоящей из чашки, ложки, кофе и мороженого. Энергия, выделяющаяся при охлаждении кофе от температуры T_1 до температуры T_3, идет на нагрев фарфоровой чашки от комнатной температуры $T_к$ до температуры T_3, на нагрев мороженого от температуры T_2 до температуры $T_0 = 0$ °C, на его плавление и дальнейший нагрев от температуры T_0 до температуры T_3, а также на нагрев серебряной ложки. Ложка, в соответствии со сказанным, может помещаться в мороженое и в кофе по нескольку раз. Это означает, что нагрев ложки каждый раз происходит на разное количество градусов, потому что мороженое понемногу нагревается от горячей ложки, а кофе понемногу остывает при погружении в него ложки. Чтобы не рассматривать весь процесс детально (ведь мы ищем оценку), предположим, что ложка погружается в мороженое один раз и нагревается на некоторую среднюю разность температур кофе и мороженого $\Delta T_{ср} \approx 80$ °C. Учитывая все это, получаем оценку для массы мороженого:

$$m_2 \approx 47 \text{ г}.$$

Легко показать, что ложечка слабо влияет на процесс охлаждения кофе, так как для ее нагрева нужно затратить очень небольшое количество энергии. Понятно также, что оценка средней разности температур $\Delta T_{ср}$ и числа порций мороженого практически не влияет на ответ.

9 класс

1. $M = m\left(\frac{L^2}{2aH} - 1\right) = 4{,}7$ кг.

2. Пусть в некоторый момент времени шарик имел радиус R и площадь поверхности S, а за маленький промежуток времени Δt радиус шарика (вследствие коррозии) уменьшился на ΔR. Тогда объем растворенного за это время алюминия будет равен $S\Delta R$, а его масса – $\rho S \Delta R$. С другой стороны, масса растворенного за время Δt алюминия равна $\alpha S \Delta t$, где $\alpha = 10^{-4}$ г/(см^2·ч) – масса металла, растворяющегося за один час с одного квадратного сантиметра поверхности. Приравняем полученные выражения:

$$\rho S \Delta R = \alpha S \Delta t$$

и найдем скорость уменьшения радиуса шарика:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Мы видим, что радиус шарика уменьшается с постоянной скоростью. Ясно, что шарик растворится полностью тогда, когда изменение его радиуса станет равно половине начального диаметра. Тогда из последней формулы получаем

$$t = \frac{\rho d}{2\alpha} = 13500 \text{ ч} = 562{,}5 \text{ сут } (\approx 18{,}5 \text{ месяцев}).$$

10 класс

1. Для упрощения рассмотрим два двигателя, находящихся по разные стороны от оси корабля, вокруг которой происходит вращение (ясно, что наличие двух остальных симметрично расположенных двигателей не повлияет на результат). Понятно, что маневр должен совершаться следующим образом: сначала двигатели разгоняют вращение корабля вокруг оси, а когда он повернется на 90°, они должны начинать тормозить корабль так, чтобы он, повернувшись еще на 90°, остановился. Так как двигатели развивают постоянную силу тяги, времена разгона и торможения одинаковы. Таким образом, чтобы решить задачу, нам достаточно найти время разворота на 90°.

При развороте двигатели перемещаются по дугам окружности. Так как силы, возникающие при работе двигателей, направлены по касательной к этой окружности, тангенциальное ускорение каждого двигателя равно $a_\tau = F/m$, где F – сила тяги, m – масса. При повороте на 90° двигатель проходит путь s, равный четверти длины дуги окружности. Из кинематики имеем $s = \pi r/2 = a_\tau t^2/2$, где r – радиус дуги окружности. Подставляя в эту формулу выражение для a_τ, найдем время поворота на 90°:

$$t = \sqrt{\frac{\pi r m}{F}}\,.$$

Из полученного выражения видно, что время разворота тем меньше, чем меньше радиус дуги окружности. Значит, разворот выгоднее проводить вокруг оси *Б*.

2. $a_A = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1 m_2}F$. Отметим, что при некоторых соотношениях между m_1, m_2 и F (в частности, при очень малых F) ускорение точки A может быть больше ускорения свободного падения g.

3. Обозначим время пролета частицы над пластинкой через τ. Так как частица отклонилась от своего первоначального направления полета на небольшой угол α, можно считать, что величина ее скорости практически не изменилась и осталась равной v. Значит, изменение импульса частицы мало и в основном обусловлено изменением направления вектора скорости: $\Delta p = p\alpha = mv\alpha$. С другой стороны, в соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса частицы за малый промежуток времени равно произведению силы, вызвавшей это изменение, на величину данного промежутка времени: $\Delta p = F\tau$. Время пролета частицы над пластинкой приближенно равно $\tau \approx L/v$. Силу же, действовавшую на частицу во время полета, можно найти, пользуясь методом изображений, который применим тогда, когда расстояние от частицы до пластинки много меньше ее размеров. Действительно, если поместить под пластинкой симметрично покоящейся частице заряд $-q$, то картина силовых линий в пространстве над пластинкой не изменится; в частности, из-за симметрии пластинка останется эквипотенциальной поверхностью. Это означает, что силу взаимодействия незаряженной пластинки и точечного заряда q, находящегося на расстоянии d от нее, можно найти как силу взаимодействия двух точечных зарядов q и $-q$, расположенных на расстоянии $2d$ друг от друга симметрично относительно пластинки. Все приведенные рассуждения будут справедливы и в случае медленного (по сравнению со скоростью распространения электромагнитного взаимодействия) движения частицы. Значит, для приближенного вычисления силы F можно воспользоваться законом Кулона: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}$. Окончательно получим

$$v = \frac{q}{4d}\sqrt{\frac{L}{\pi\varepsilon_0 \alpha m}}\,.$$

11 класс

1. На полоски линии действуют две силы: кулоновская сила электростатического притяжения, обусловленная наличием на поверхности полосок зарядов, и сила Ампера, связанная с протеканием тока и отталкивающая пластинки друг от друга. Вычислим кулоновскую силу, приходящуюся на единицу длины линии. Выделим участок линии длиной l. Пусть на нем имеется заряд q. Тогда

$$\frac{F_К}{l} = \frac{qE}{2l} = \frac{qU}{2bl} = \frac{CU^2}{2bl} = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2b^2},$$

где E – напряженность электрического поля между полосками линии, которая представляет собой плоский конденсатор. (Здесь учтено, что кулоновская сила равна произведению заряда, находящегося на рассматриваемом участке пластины, на величину напряженности поля, создаваемого другой пластиной, которая равна $E/2$.) Теперь найдем силу Ампера, приходящуюся на единицу длины линии. Она пропорциональна квадрату силы тока:

$$\frac{F_А}{l} = BI^2 = B\left(\frac{U}{R}\right)^2.$$

Коэффициент пропорциональности B можно найти из условия, что при некотором сопротивлении нагрузки $R = R_0$ силы Кулона и Ампера уравновешивают друг друга:

$$B = \frac{\varepsilon_0 a R_0^2}{2b^2}\,.$$

После увеличения сопротивления нагрузки в $n = 5$ раз кулоновская сила не изменится, а сила Ампера уменьшится в n^2 раз; значит, полоски линии будут притягиваться с силой, равной разности сил Кулона и Ампера:

$$F = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2b^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 0{,}042 \text{ Н/м}.$$

2. Прежде всего заметим, что луч, который видит пассажир, отражается от головки рельса, которая имеет округлую форму. Поэтому при большом радиусе закругления рельсов (и, следовательно, при малых углах падения и отражения луча) можно пренебречь тем, что глаза пассажира и фары метропоезда находятся на разных высотах над уровнем рельсов, и считать, что фары, глаз пассажира и точка рельса, от которой отражается свет, лежат в практически горизонтальной плоскости. Далее, необходимо рассмотреть два случая: когда тоннель закругляется в сторону платформы, на которой стоит пассажир, и когда тоннель закругляется в противоположную от пассажира сторону.

Для первого случая из рисунка 11 видно, что прежде всего пассажир увидит луч от правой фары, отраженный правым рельсом. Отрезки, проведенные из центра кривизны пути O к фаре F, пассажиру P, точке отражения света от рельса K и точке S, в которой луч касается стенки тоннеля, составляют друг с другом равные углы α. Из треугольника OPK можно приближенно найти расстояние от внутренней стенки тоннеля до внешнего рельса:

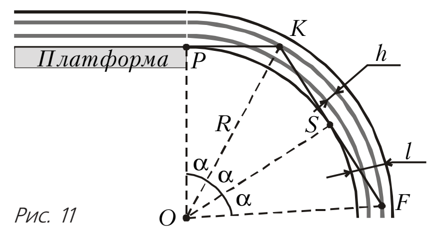

Рис. 11

$$\frac{l}{2} + \frac{h}{2} \approx R(1 - \cos\alpha) \approx \frac{R\alpha^2}{2},$$

откуда

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{l+h}{R}}\,,$$

а искомое расстояние

$$L \approx 3\alpha R \approx 3\sqrt{R(l+h)}\,.$$

Второй случай отличается от первого тем, что луч касается стенок тоннеля дважды. Из соответствующих построений находим

$$L \approx \left(3\sqrt{l+h} + \sqrt{2l}\right)\sqrt{R}\,.$$

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. По часам с обломанной минутной стрелкой можно установить, что первые 3000 м автомобиль проходит за $(60m + 30)$ секунд, где m – целое неотрицательное число. Поэтому величина $1/v$, где v – скорость автомобиля, может принимать следующий ряд значений:

$$\frac{1}{v} = 0{,}01;\ 0{,}03;\ 0{,}05;\ 0{,}07;\ 0{,}09;\ 0{,}11;\ 0{,}13;\ \ldots) \text{ с/м}.$$

Следующие 4000 м автомобиль проходит за $(60n + 20)$ секунд, где n – целое неотрицательное число. Поэтому

$$\frac{1}{v} = 0{,}005;\ 0{,}02;\ 0{,}035;\ 0{,}05;\ 0{,}065;\ 0{,}08;\ 0{,}095;\ 0{,}11;\ 0{,}125;\ldots) \text{ с/м}.$$

Так как автомобиль движется с постоянной скоростью, величина $1/v$ может принимать только те значения, которые встречаются и в первой, и во второй последовательности чисел, т.е.

$$\frac{1}{v} = (0{,}05\,;\ 0{,}11;\ \ldots)\ \text{с/м}.$$

По условию задачи $v > 40$ км/ч $\approx 11{,}1$ м/с, или $1/v < 0{,}09$ с/м. Таким образом, из набора возможных значений $1/v$ условию задачи удовлетворяет единственное: $1/v = 0{,}05$ с/м. Отсюда $v = 20$ м/с $= 72$ км/ч.

2. Так как спирт сгорает с постоянной скоростью, количество теплоты, переданное системе, прямо пропорционально времени нагрева. Из графика в условии задачи следует, что в течение первых 60 секунд стакан и жидкость нагревались, затем в течение 120 секунд жидкость кипела и испарялась, и, наконец, в последние 40 секунд нагревался лишь пустой стакан. Составив уравнение теплового баланса для каждого промежутка времени, найдем

$$L_ж = \frac{\mu q \Delta t_2}{m} = 891\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, \quad c_ж = \frac{\mu q\left(\Delta t_1 - \Delta t_3\right)}{m \Delta T_3} = 2475\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}.$$

9 класс

1. При движении шарика в жидкости на него действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила вязкого трения. Две первые силы являются объемными. Это значит, что их сумма пропорциональна разности $\left|\rho - \rho_ж\right|$ (здесь ρ – плотность шарика) и объему шарика, т.е. кубу его диаметра d. Третья сила пропорциональна произведению vd^n, где v – скорость шарика, n – неизвестный показатель степени. При движении с постоянной скоростью сумма сил тяжести и Архимеда равна силе вязкого трения. Тогда для дробинки диаметром d_1 запишем

$$A\left(\rho_д - \rho_ж\right)d_1^3 = Bd_1^n v_1,$$

или

$$v_1 = \frac{A}{B}\cdot 7\rho_ж d_1^{3-n}.$$

Аналогично, для дробинки диаметром d_2 имеем

$$v_2 = \frac{A}{B}\cdot 7\rho_ж d_2^{3-n} = \frac{A}{B}\cdot 7\rho_ж d_1^{3-n}\cdot 2^{3-n} = 4v_1 = \frac{A}{B}\cdot 7\rho_ж d_1^{3-n}\cdot 2^2.$$

Отсюда получаем

$$2^{3-n} = 2^2, \text{ и } n = 1.$$

Теперь можно найти скорость, с которой всплывет пузырек воздуха (массой воздуха пренебрегаем):

$$v_3 = \frac{A}{B}\cdot\rho_ж d_3^{3-n} = \frac{A}{B}\cdot\rho_ж d_3^2 = \frac{1}{7}\frac{A}{B}\cdot 7\rho_ж d_1^2\cdot 1{,}5^2 = \frac{2{,}25}{7}v_1 \approx 0{,}32v_1.$$

2. Из условия задачи вытекает, что никакие две клеммы не могут быть подключены только к батарейке (иначе бы амперметр при подключении к этим клеммам зашкаливало); никакие две клеммы не могут быть соединены друг с другом только соединительным проводом (иначе бы два тока из трех совпадали); если схема состоит из нескольких отдельных частей, то все три клеммы должны быть подключены к той ее части, которая содержит батарейку. Рассмотрев все возможные схемы «черного ящика», получаем, что величины сопротивлений могут быть равны $R_1 = R_2 = \frac{\mathcal{E}}{2I}$, когда батарейка и сопротивления соединены последовательно, или $R_1 = \frac{\mathcal{E}}{2I}$ и $R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I}$, когда батарейка и сопротивления соединены «звездой» (рис.12).

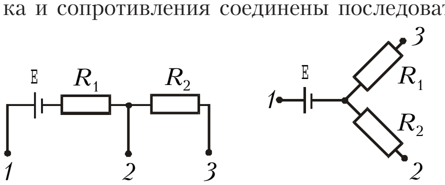

Рис. 12

10 класс

1. Пусть сетка состоит из N радиальных нитей, а жесткость каждой из них равна k. При смещении центра сетки вниз на $\Delta x \ll R$ сила упругости F, действующая со стороны сетки на гимнаста, направлена вертикально вверх (в силу центральной симметрии) и равна

$$F = NF_1\sin\alpha \approx NF_1\frac{\Delta x}{R} = Nk\left(\sqrt{R^2 + (\Delta x)^2} - R\right)\frac{\Delta x}{R} \approx \frac{Nk(\Delta x)^3}{2R^2},$$

где F_1 – сила упругости, действующая на гимнаста со стороны каждой из нитей. Из условия известно, что, когда гимнаст лежит в центре сетки неподвижно, она прогибается на величину l, при этом действующая на гимнаста сила тяжести mg уравновешивается силой F:

$$mg = \frac{Nkl^3}{2R^2}.$$

Рассмотрим теперь падение гимнаста с высоты H. Перед падением его потенциальная энергия (относительно уровня ненатянутой сетки) была равна mgH. В момент максимального прогиба сетки она складывалась из энергии в поле силы тяжести $-mgL$ (она отрицательна) и энергии упругой деформации сетки

$$\frac{Nk}{2}\left(\sqrt{R^2 + L^2} - R\right)^2 \approx \frac{NkL^4}{8R^2}.$$

Из закона сохранения механической энергии получаем

$$mgH = -mgL + \frac{NkL^4}{8R^2},$$

откуда находим

$$H = \frac{L^4}{4l^3} - L.$$

2. Пусть искомый заряд на одном из шариков положителен и равен q (тогда, ввиду одинаковости шариков, заряд на втором шарике равен $-q$). Окружим шарик воображаемой концентрической сферической поверхностью радиусом $r + \Delta r$ (где $\Delta r \ll r$) и найдем напряжение ΔU между ней и поверхностью шарика:

$$\Delta U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}\Delta r.$$

Сопротивление среды, находящейся между этими поверхностями, равно

$$\Delta R = \rho\frac{\Delta r}{4\pi r^2},$$

значит, сила тока, текущего между рассматриваемыми поверхностями, равна

$$I = \frac{\Delta U}{\Delta R} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0\rho}.$$

Так как по условию задачи заряд на шарике является установившимся, найденная величина I представляет собой силу тока, текущего во всей цепи.

Найдем теперь разность потенциалов между поверхностями шариков. С одной стороны, она равна

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

с другой стороны –

$$\Delta\varphi = \mathcal{E} - IR.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \mathcal{E} - \frac{qR}{\varepsilon\varepsilon_0\rho},$$

решая которое, находим величину заряда :

$$q = \frac{2\pi r\rho\varepsilon\varepsilon_0\mathcal{E}}{\rho + 2\pi rR}.$$

11 класс

1. Обсудим сначала, почему стержень начнет вращаться. Рассмотрим воображаемый круговой контур, по которому движутся заряды при вращении стержня вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При выключении магнитного поля магнитный поток через этот контур уменьшается, что приводит к возникновению вихревого электрического поля. Это поле действует на заряды и разгоняет их. Данный процесс (для простоты понимания) можно представлять так, как будто вместо воображаемого контура имеется проводящее кольцо, содержащее всего два носителя заряда. Тогда при выключении магнитного поля в проводнике будет возникать ЭДС индукции и потечет ток, т.е. заряды придут в движение.

Прежде всего найдем ЭДС индукции $\mathcal{E}$. По условию, однородное магнитное поле в любой момент времени сосредоточено между полюсами электромагнита и строго вертикально. По закону электромагнитной индукции,

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t},$$

где $\Phi = SB$ – магнитный поток через контур, $S = \pi d^2/4$ – площадь торцевого сечения полюса электромагнита, B – мгновенное значение индукции магнитного поля. Пусть магнитное поле равномерно убывает от значения B_0 до нуля за время τ:

$$B = B_0 - \frac{B_0}{\tau}t,$$

тогда

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{B_0}{\tau}, \text{ и } \mathcal{E} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi d^2 B_0}{4\tau}.$$

С другой стороны, ЭДС по определению есть отношение работы, совершаемой сторонними силами при перемещении пробного заряда, к его величине. В нашем случае появление ЭДС индукции связано с возникновением вихревого электрического поля, которое и совершает работу. Значит,

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{F_{\text{эл}}}{q}\pi L = E\pi L,$$

где E – напряженность вихревого электрического поля. Приравнивая два выражения для $\mathcal{E}$, найдем

$$E = \frac{d^2 B_0}{4\tau L}.$$

Так как система симметрична, для нахождения угловой скорости вращения стержня можно рассмотреть только один заряд. На этот заряд в вихревом электрическом поле действует сила, равная $F = qE$ и направленная по касательной к окружности, по которой он движется. В соответствии со вторым законом Ньютона, эта сила приводит к появлению тангенциального (касательного) ускорения

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qd^2B_0}{4m\tau L}.$$

В течение времени τ, за которое происходит выключение магнитного поля, заряды движутся по окружности с этим ускорением и приобретают линейную скорость

$$V = a\tau = \frac{qd^2B_0}{4mL}.$$

Этой линейной скорости зарядов соответствует угловая скорость вращения стержня

$$\omega = \frac{V}{L/2} = \frac{qd^2B_0}{2mL^2}.$$

2. Так как радиус экрана много больше расстояния между соседними интерференционными полосами, участок экрана вблизи точки A, на котором располагаются эти полосы, можно считать плоским. Круговая частота колебаний, соответствующих волне с длиной волны λ, распространяющейся со скоростью c, равна $\omega = 2\pi c/\lambda$. Угол, который образует направление первой волны, падающей вдоль радиуса BO, с рассматриваемой частью экрана, равен $\beta_1 = \pi/2 - \varphi$ (рис.13). Для второй волны соответствующий угол равен $\beta_2 = \pi/2 - \varphi - \alpha$. Расстояние δx между двумя соседними максимумами на экране найдем из условия, что разность фаз обеих волн равна 2π:

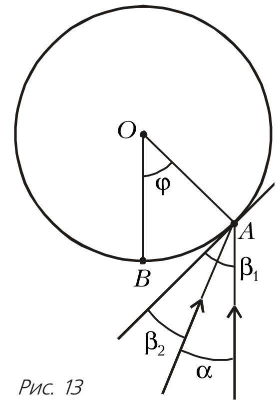

Рис. 13

$$2\pi = \frac{\omega}{c}\delta x\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right),$$

откуда

$$\delta x = \frac{2\pi c}{\omega}\frac{1}{\cos\beta_1 - \cos\beta_2} = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://techno.ru/vivovoco
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, М.А.Сумнина, Л.Н.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №