Пусть при всех $m > s \geq 0$ «привязанные» к соревнованиям с новыми номерами $n - m$ спортсмены выбывают не позднее этих соревнований. Рассмотрим соревнование с новым номером $n - s$. По предположению индукции, к этому соревнованию уцелели не более $s + 1$ «отмеченных» спортсменов. С другой стороны, 2^s самых слабых участников этого вида соревнования выбывают в результате его проведения. Поскольку $2^s \geq s + 1$, то «отмеченный» в этом соревновании спортсмен, если он при новом порядке до этого соревнования и дожил, попадает в более слабую половину и выбывает.

в) Пример построим по индукции. Пусть есть n видов соревнований, перенумерованных числами от 1 до n. Возьмем две группы A и B по 2^{n-1} спортсменов такие, что группа B дает пример соревнования в видах соревнований с 1-го по $(n - 1)$-й с $2^{n-1} - n + 1$ возможными победителями. (Такое возможно по предположению индукции.) Пусть в этих $n - 1$ видах любой спортсмен из A сильнее любого из B, а в n-м виде соревнования любой спортсмен из B сильнее любого из A.

Если провести n-й вид соревнований первым, то останутся только спортсмены из B, из которых перестановками остальных видов соревнований можно $2^{n-1} - n + 1$ спортсменов сделать победителями.

В противном случае, т.е. после любого иного первого тура, останутся только спортсмены из группы A, которые будут соревноваться далее в каких-либо $n - 1$ из n видов соревнований. Докажем (опять по индукции), что в таких условиях можно сделать победителями $2^{n-1} - 1$ спортсменов, причем есть такой порядок соревнований, при котором единственный аутсайдер (не «возможный победитель») выходит в финал. (*)

База очевидна: $n = 2$. Пусть есть пример n соревнований с 2^{n-1} участниками, удовлетворяющий (*).

Опять берем две группы по 2^{n-1} спортсменов, при этом любой спортсмен из A сильнее любого из B в соревнованиях с 1-го до n-го, а в $(n + 1)$-м – наоборот. Соревнования с 1-го по n-е организуем так, чтобы и в группе A, и в группе B можно было сделать победителями по $2^{n-1} - 1$ спортсменов. Единственный аутсайдер в A – самый сильный в $(n + 1)$-м виде соревнования. Проводя первым $(n + 1)$-й вид соревнований, получим $2^{n-1} - 1$ возможных победителей из B, причем при некотором порядке соревнований аутсайдер выйдет в финал (по индуктивному предположению). Если вообще не проводить $(n + 1)$-й вид соревнования, то в первом туре (каков бы он ни был) вылетают все из B, а далее можно сделать победителями $2^{n-1} - 1$ из A. Осталось объяснить, как сделать победителем аутсайдера в A. Для этого мы первым проводим тот вид соревнования, который является финальным при порядке, обеспечивающем выход аутсайдера в финал. После этого остались только спортсмены из A. Далее проводим соревнования в таком порядке, который обеспечивает выход аутсайдера из A в финал, а завершаем $(n + 1)$-м видом соревнования. В нем аутсайдер побеждает.

10 класс

1. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + ac$. Из условия следует, что $f(c) = c^2 + bc + ac = (a + b + c)c < 0$. В точке c функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, следовательно, парабола $y = f(x)$ пересекает ось Ox в двух точках, т.е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трехчлена положителен: $b^2 - 4ac > 0$.

2. См. задачу М1693 «Задачника «Кванта».

3. *Ответ*: (1, 1).

Докажем вначале, что x и y взаимно просты. Предположим противное. Тогда x и y делятся на некоторое простое число p; пусть p входит в разложения на простые множители чисел x и y соответственно в степенях $a \geq 1$ и $b \geq 1$, положим для определенности $a \geq b$. Тогда максимальная степень p, на которую делится $x^3 + y$, равна b (поскольку x^3 делится на p^{3a} и тем более на p^{b+1}, а y делится на p^b и не делится на p^{b+1}). Но $x^2 + y^2$ делится на p^{2b}, следовательно, $x^3 + y$ не может делиться на $x^2 + y^2$. Это противоречие доказывает, что x и y взаимно просты.

Далее, из условия следует, что число $\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^3 + y\right) = y(xy - 1)$ делится на $x^2 + y^2$. Заметим, что y и $x^2 + y^2$ не имеют общего множителя, большего 1 (так как x и y взаимно просты), значит, $xy - 1$ делится на $x^2 + y^2$. Но если $xy > 1$, то это невозможно, так как $x^2 + y^2 \geq 2xy > xy - 1$.

4. См. задачу М1684 «Задачника «Кванта».

5. Пусть $f\colon [0; 1] \to [0; 1]$, $f(x) = x/\sqrt{3}$ и $g\colon [0; 1] \to [0; 1]$, $g(x) = 1 - (1 - x)/\sqrt{3}$ – функции, отвечающие прыжкам кузнечика. Область значений f – отрезок $\left[0; 1/\sqrt{3}\right]$, область значений g – отрезок $\left[1 - 1/\sqrt{3}; 1\right]$. Каждый из этих отрезков имеет длину $1/\sqrt{3}$, и вместе они покрывают отрезок $[0; 1]$.

Пусть n – некоторое натуральное число. Рассмотрим всевозможные функции $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_n(x)\right)\ldots\right)\right)\colon [0; 1] \to [0; 1]$, где каждая функция h_i – либо f, либо g. Легко видеть, что область значений каждой из этих функций есть отрезок длины $\left(1/\sqrt{3}\right)^n$. Докажем индукцией по n, что эти отрезки покрывают отрезок $[0; 1]$. Для $n = 1$ это утверждение уже проверено. Предположим, что области значений всевозможных функций $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_{k-1}(x)\right)\ldots\right)\right)$ покрывают отрезок $[0; 1]$. Фиксируем любую из функций $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_{k-1}(x)\right)\ldots\right)\right)$. Область значений этой функции покрывается областями значений функций $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_{k-1}(f(x))\right)\ldots\right)\right)$ и $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_{k-1}(g(x))\right)\ldots\right)\right)$. Тем самым утверждение доказано.

Пусть теперь на отрезке $[0; 1]$ выбрана точка a. Рассмотрим интервал $(a - 0{,}01; a + 0{,}01)$ и покажем, что кузнечик сможет в него попасть. Выберем n столь большим, чтобы было выполнено неравенство $\left(1/\sqrt{3}\right)^n < 0{,}01$. По доказанному, можно выбрать такую функцию $h_1\left(h_2\left(\ldots\left(h_n(x)\right)\ldots\right)\right)$, что точка a принадлежит области ее значений. Тогда вся область значений рассматриваемой функции (отрезок длины $\left(1/\sqrt{3}\right)^n$) лежит внутри интервала $(a - 0{,}01; a + 0{,}01)$. Это означает, что из любой точки отрезка $[0; 1]$ кузнечик попадет внутрь интервала $(a - 0{,}01; a + 0{,}01)$, выполнив последовательно прыжки, соответствующие функциям $h_n, h_{n-1}, \ldots, h_1$.

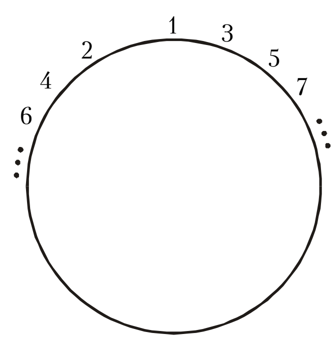

Рис. 10

6. *Ответ*: расстановка на рисунке 10 (или получающаяся из нее поворотом либо осевой симметрией).

Лемма. Пусть по окружности расставлены 1999 различных положительных чисел a_1, a_2, …, a_{1999} и пусть $a_1 > a_{1998}$. Рассмотрим следующую операцию: числа a_i и a_{1999-i}, где $i = 1, 2, \ldots, 999$, меняем местами, если $a_i < a_{1999-i}$, и не меняем в противном случае. Если хотя бы одна пара чисел поменялась местами, то сумма произведений десяток чисел, идущих подряд, увеличилась.

Доказательство леммы. Рассмотрим симметричные группы по 10 чисел a_i, …, a_{i+9} и a_{1999-i}, …, a_{1990-i}. Пусть z – произведение чисел, содержащихся одновременно и в первой, и во второй группе (произведение нулевого числа сомножителей считается равным единице); x и x' – произведения чисел, содержащихся, соответственно, только в первой и только во второй группе, оставшихся на своем месте после проведения