а также обратные к ним

$$\frac{1}{1-x}=111111,\quad \frac{1}{1-y}=111111\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1-z}=111111\frac{1}{3}.$$

Мы видим, что $\frac{1}{1-x}<\frac{1}{1-z}<\frac{1}{1-y}$. Поскольку все рассматриваемые числа положительны, $1-x>1-z>1-y$. Следовательно, $x<z<y$.

2. См. задачу М1691 «Задачника «Кванта».

3. Предположим, что $ab=cd$. Тогда

$$a^2+2cd+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$c^2+2ab+d^2=c^2+2cd+d^2=(c+d)^2.$$

Таким образом, достаточно найти четыре различных натуральных числа a, b, c и d, для которых $ab=cd$. Для этого найдем число n, разлагающееся в произведение двух множителей различными способами. Например, таким числом является $n=6$; в этом случае можно взять $a=1$, $b=6$, $c=2$, $d=3$.

4. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, – это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500-300=200$, $200+198=398$, $398-300=98$, $98+198=296$, $296+198=494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

5. Рассмотрим поворот на 180° по часовой стрелке вокруг центра O (рис.9). При этом повороте треугольник ONC перейдет в треугольник $ON'A$. Рассмотрим четырехугольник $MAN'O$; в нем углы MAN' и MON' прямые. В самом деле, $\angle MAN'=\angle BAC+\angle BCA$, а $\angle MON'=\angle MOA+\angle NOC==180°-\angle MON$. Следовательно, $MN'^2=AM^2+AN'^2==OM^2+ON'^2$. Далее, $ON'=ON$, $OM^2+ON^2=MN^2$. С другой стороны, $AN'=CN$ – и требуемое равенство доказано.

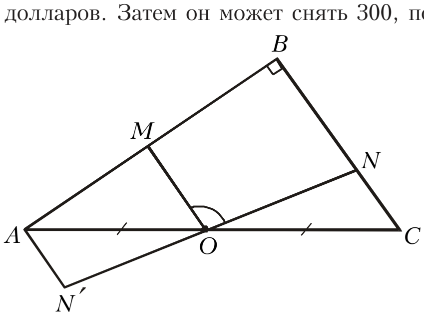

Рис. 9

6. Всего в турнире были сыграны $n(n-1)$ партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов участники набрали по $n-1$ очку. Каждый шахматист сыграл белыми $n-1$ партию, и количество выигранных им партий белыми равно одному из n чисел: 0, …, $n-1$. Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 до $n-1$. Рассмотрим двух участников турнира: A, выигравшего $n-1$ партию белыми, и B, не выигравшего ни одной такой партии. Разберемся, каким мог быть результат партии, которую A играл против B черными. С одной стороны, A набрал $n-1$ очко, играя белыми, так что все свои партии черными, в том числе и эту, он должен был проиграть. Но B не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Противоречие.

9 класс

1. Произведение чисел на доске не меняется. Действительно, $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=ab$. Поэтому искомое произведение равно 2.

2. *Ответ*: да. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером $n>1000$ он делает так:

1) если на n-м и $(2000-n)$-м местах стоят одинаковые буквы – ничего не делает;

2) если на этих местах – разные буквы, то одна из них не совпадает с той, которая стоит на 1000-м месте. Второй игрок меняет ее с 1000-й буквой.

3. См. задачу М1677 «Задачника «Кванта».

4. *Ответ*: $k=2$.

Обозначим $n=1000$. Имеем два случая:

1) $k>1000$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1}=10^{n+1}\cdot\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\,\underbrace{2\ldots2}_{k-(n+1)}.$$

Очевидно, что это число не является квадратом натурального: n четно, поэтому в разложение числа входит нечетное число пятерок.

2) $k\le1000$. Тогда

$$\underbrace{1\ldots1\overbrace{2\ldots2}^{k}}_{2n}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1}=\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}\underbrace{0\ldots0}_{k}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}\underbrace{0\ldots0}_{k}=10^k\left(\underbrace{1\ldots1}_{2n-k}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1-k}\right).$$

Получили: $k=2l$, и достаточно найти все такие $l<n$, что число $A=\underbrace{1\ldots1}_{2n-2l}-\underbrace{2\ldots2}_{n+1-2l}$ – полный квадрат.

Заметим, что число x является полным квадратом в точности тогда, когда и $9x$. Имеем:

$$9A=\underbrace{9\ldots9}_{2n-2l}-1\underbrace{9\ldots9}_{n-2l}8=\underbrace{9\ldots9}_{n-2}8\underbrace{0\ldots0}_{n-2l}1.$$

«Близкий» к числу $9A$ полный квадрат – число $B=\left(10^{n-l}\right)^2$. Очевидно, $B>9A$. Очевидно также, что при $Y>Z$ будет $Y^2-Z^2\ge Y^2-(Y-1)^2=2Y-1$. А теперь найдем разность $B-9A$:

$$10^{2n-2l}-9\ldots980\ldots01=1\underbrace{9\ldots9}_{n-2l+1}=2\cdot10^{n-2l+1}-1.$$

Ясно, что $2\cdot10^{n-2l+1}-1\le2\cdot10^{n-l}-1$, причем равенство имеет место в точности при $l=1$, откуда сразу и получается ответ задачи.

5. Будем считать, что R лежит на AC, S – на BC. Тогда

$$RQ=RC-QC=\frac{b}{2}-\frac{a+b-c}{2}=\frac{c-a}{2}.$$

Поскольку треугольники AQP и RQT подобны, а треугольник AQP равнобедренный, то $RQ=RT$. Следовательно,

$$ST=RS-RT=RS-RQ=\frac{c}{2}-\frac{c-a}{2}=\frac{a}{2}=BS.$$

Отсюда треугольник TSB равнобедренный и $\angle SBT==\angle STB=\angle TBA$, а BT – биссектриса угла B треугольника ABC.

6. б) Укажем для каждого вида соревнования спортсмена, который выбывает в этом виде, и назовем его «отмеченным». Построение индуктивное.

Для первого вида соревнования – это самый слабый в первом виде: a_1. Обозначим $A_1=\{a_1\}$.

Пусть уже построено множество $A_k=\{a_1,\ldots,a_k\}$ спортсменов такое, что a_i выбывает в i-м виде соревнования. Обозначим через a_{k+1} спортсмена, который в $(k+1)$-м виде соревнования слабее всех спортсменов, не входящих в множество $A_k==\{a_1,\ldots,a_k\}$. Докажем, что a_{k+1} выбывает при любом порядке соревнований не позднее $(k+1)$-го вида соревнования.

Для доказательства опять прибегнем к индукции. Пусть соревнование при новом порядке соревнований проводится первым. Поскольку при любом натуральном k будет $2^{k-1}\ge k$, то «отмеченный» в этом соревновании спортсмен попадает в более слабую половину его участников и выбывает.