

3. а) *Указание.* Нетрудно видеть, что данное равенство равносильно тому, что

$$\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

б) *Указание.* Искомое множество есть объединение биссектрис координатных углов. в) $\frac{\pi}{2}$. *Указание.* Докажите по индукции, что сумма первых n слагаемых в данной бесконечной сумме равна $\arctg n$.

4. а, б) $\frac{1}{12}\sqrt{3}$. *Указание.* Учтите, что имеются два различных варианта расположения единичных ребер! в) См. задачу 6 в статье.

Разные задачи

1. а) $(x, y) = (1998, 0); (0, 1998); (888, 222); (222, 888)$. *Указание.* Из равенства $\sqrt{y} = \sqrt{1998} - \sqrt{x}$ получаем, что $y = 1998 + x - 2\sqrt{1998x}$, откуда следует, что число $1998x$ должно быть полным квадратом. б) $(x, y, z) = (222, 222, 222)$. *Указание.* Докажите вначале следующее утверждение.

Лемма. Если $a, b, u, v \in \mathbf{N}$ и $a\sqrt{u} + b\sqrt{v} \in \mathbf{N}$, то $\sqrt{u}, \sqrt{v} \in \mathbf{N}$.

2. а) Только равносторонние треугольники. б) *Указание.* Решение очевидно, если использовать такое «геометрически очевидное» утверждение. Если $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq a_n$,

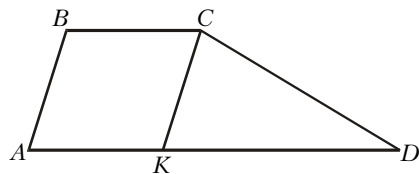


Рис. 4

то существует замкнутая выпуклая ломаная, длины звеньев которой равны a_i . Попробуйте дать какое-нибудь обоснование этого утверждения. в)

Квадраты и только

они. *Указание.* Нетрудно видеть, что если углы четырехугольника образуют арифметическую прогрессию, то он – трапеция. Далее, если и длины его сторон образуют арифметическую прогрессию, то $KD = |CD - CK|$ (обозначения на рисунке 4, отрезок CK параллелен стороне AB), откуда следует, что $K = D$, т.е. этот четырехугольник является прямоугольником.

Задачи с проводящими сферами

1. $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$; уменьшится на $\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$.

2. $q_1 = -q \frac{R_2 - 1}{R_1}, q_2 = -q \frac{1 - R_1}{R_2}$.

3. $Q = -q \frac{R}{l}$ при $l > R, Q = -q$ при $l < R$.

4. $Q = -\left(q_1 + q_2 \frac{R}{l_2} \right)$. 5. $Q_R = -\frac{q}{4}, Q_{3R} = \frac{q}{4}$.

LXII Московская математическая олимпиада

ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА

6 класс

1. *Ответ:* изначально было отмечено 15 точек. Если (до уплотнения) было отмечено n точек, то после уплотнения будет отмечено $2n - 1$ точек (из которых n старых и $n - 1$ новая).

Следовательно, число точек до уплотнения можно найти, прибавив к числу точек после уплотнения единицу и поделив пополам. Таким образом, до последнего уплотнения было $(113 + 1)/2 = 57$ точек, до второго $-(57 + 1)/2 = 29$ точек и в самом начале $-(29 + 1)/2 = 15$ точек.

2. Для начала разложим 420 на множители:

$$420 = 6 \cdot 7 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Теперь уже несложно сгруппировать эти множители в пять групп так, чтобы в сумме получилось 20:

$$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 420; 7 + 5 + 3 + 4 + 1 = 20.$$

3. Заметим для начала, что белых клеток должно быть втрое больше черных, так что белых будет 12, а черных – 4. После этого легко нарисовать требуемую картинку (рис.5).

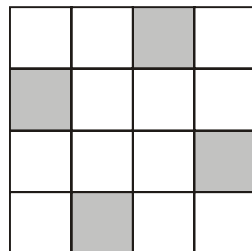


Рис. 5

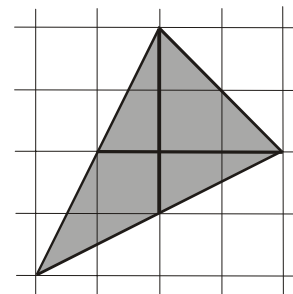


Рис. 6

4. Вертолет летит на юг по московскому меридиану, затем по параллели, потом снова по меридиану на север, а затем по более северной параллели. Так как все меридианы одинаковы, широта вертолета не изменится (сколько градусов он пролетел на юг, столько же он пролетит и на север). А параллели разные: чем севернее, тем короче, так что на северной параллели те же 300 км составят большее число градусов. Значит, вертолет окажется восточнее Москвы на той же широте.

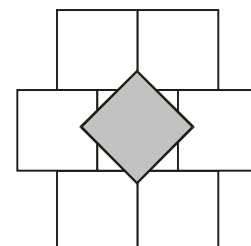


Рис. 7

5. Удобно сначала нарисовать перпендикулярные медианы треугольника, а потом уже вершины. На рисунке 6 показан один из возможных вариантов.

6. См. рис.7.

7 класс

1. *Ответ:* 25/76. Сумма числителя и знаменателя равна 101. Значит, чем больше числитель дроби, тем меньше ее знаменатель – и тем больше сама дробь. Видно, что 25/76 еще меньше 1/3, а 26/75 – уже больше.

2. См. рис.8.

4. *Ответ:* рассвет был в 6 часов утра.

6. См. задачу 4 раздела «Квант» для младших школьников» в этом номере журнала.

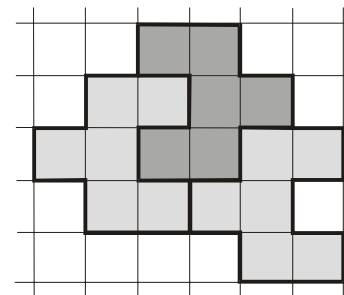


Рис. 8

8 класс

1. Рассмотрим числа

$$1 - x = \frac{1}{111111}, 1 - y = \frac{2}{222223}, 1 - z = \frac{3}{333334}$$