«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Пусть первоначально на столе лежало N конфет, и пусть первые несколько (не уточняем, сколько именно) мальчиков взяли себе в общей сложности k конфет. Тогда на столе осталось $(N-k)$ конфет. Сколько конфет получит очередной мальчик? Десятая часть остатка – это $(N-k)/10$ конфет, и еще десятая часть того, что взяли себе предыдущие мальчики, – это $k/10$ конфет. Всего это составляет $(N-k)/10 + k/10 = N/10$ конфет.

Таким образом получается, что каждый мальчик независимо от очередности получил десятую часть всех конфет. Поскольку в один прекрасный момент конфеты кончились, то мальчиков было 10. Ну, а досталось всем поровну, и никто не в обиде.

2. Дедушка прав.

Если кастрюля удерживается на столе, сдвинем ее дальше от центра стола так, чтобы центр тяжести кастрюли в точности приходился на край стола. Очевидно, что и в этом случае кастрюля еще удержится на столе. На рисунке 1 показано, что центр кастрюли находится в вершине правильного шестиугольника, вписанного в границу круглого стола. Так как радиус стола O_1O равен длине отрезков OA и OB, а диаметр кастрюли меньше диаметра стола, то край кастрюли пересекает оба эти отрезка. Сектор, высекаемый этими отрезками на дне кастрюли, по площади в точности равен $1/3$ площади дна. Можно сделать вывод, что в крайнем положении, когда кастрюля еще удержится на столе, она соприкасается с плоскостью стола по площади, большей $1/3$ площади своего дна. Значит, если бабушка поставит кастрюлю так, как она хочет, то кастрюля на столе не удержится.

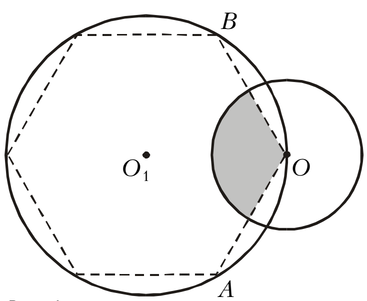

Рис. 1

3. Можно. Сто первых натуральных чисел распадаются на 50 пар так, что в каждой паре сумма чисел равна 101. Пусть среди 25 зачеркнутых чисел нашлось k полных пар, а остальные $25-2k$ из них присутствуют без парных. К этим непарным $25-2k$ числам добавим $25-2k$ чисел, дополнительных к каждому из них до пары, и зачеркнем их. Еще зачеркнем k пар чисел среди незачеркнутых – получим всего 25 полных пар чисел, что составляет половину суммы всех натуральных чисел от 1 до 100.

4. В послании зашифрована фраза: «Жил-был у бабушки серенький козлик…».

5. Если царь – лжец, а все его подданные – рыцари, гибельной могла оказаться фраза «Царь – рыцарь». Передавая ее из уст в уста, рыцари гибнут, последний же перед смертью повторяет ее царю.

Предположим, что царь на самом деле рыцарь. Если бы к тому же все его подданные были рыцарями, то все они говорили бы друг другу только правду, и никаких катаклизмов в государстве не произошло бы. Покажем, что если среди подданных имеется один лжец, то ситуация, описанная в условии задачи, реализуется. Если царь скажет лжецу: «В государстве имеется один лжец», то после произнесения этой фразы лжецом тот станет рыцарем, а сама фраза – ложной. Далее схема гибели повторяет предыдущую.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку в натуральном ряду числа, кратные 2, встречаются чаще, чем числа, кратные 5, то число нулей, которыми оканчивается факториал $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, равно количеству пятерок в разложении $n!$ на простые множители.

Пусть $n!$ – наименьший из факториалов, оканчивающийся ровно m нулями. Тогда n делится на 5 (в противном случае еще меньший факториал $(n-1)!$ оканчивался бы таким же количеством нулей). Заметим, что если n делится на 5, но не делится на $5^2 = 25$, то разложение числа $(n-1)!$ на простые множители содержало бы на одну пятерку меньше, и потому число $(n-1)!$ оканчивалось бы ровно $m-1$ нулями, что противоречит условию. Итак, n делится на 25. Но тогда число $n+5$ не делится на 25, хотя делится на 5, и, следовательно, в разложении числа $(n+5)!$ на простые множители содержится на одну пятерку больше, чем в разложении $n!$. Следовательно, факториал, оканчивающийся $m+1$ нулями, существует.

17. Из равенства $x_2 + y_2 + z_2 = x_1 + x_2 + x_3$ выразим переменную z_2 через остальные переменные: $z_2 = x_1 + x_3 - y_2$. Аналогично, из равенства $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + y_1 + z_1$ выражаем переменную $y_3 = x_1 + z_1 - y_2$; из равенства $y_1 + y_2 + y_3 = x_3 + y_3 + z_3$ выражаем переменную $y_1 = x_3 + z_3 - y_2$, а из равенства $x_2 + y_2 + z_2 = z_1 + z_2 + z_3$ – переменную $x_2 = z_1 + z_3 - y_2$. Воспользовавшись этими выражениями, получаем

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 &= x_1\left(z_1 + z_3 - y_2\right)x_3 + \\ &+ \left(x_3 + z_3 - y_2\right)y_2\left(x_1 + z_1 - y_2\right) + z_1\left(x_1 + x_3 - y_2\right)z_3 = \\ &= x_1z_1x_3 + x_1z_3x_3 - x_1y_2x_3 + x_3y_2x_1 - x_3y_2^2 + x_3y_2z_1 + \\ &+ z_3y_2x_1 - z_3y_3^2 + z_3y_2z_1 - y_2^2x_1 + y_2^3 - \\ &- y_2^2z_1 + z_1x_1z_3 + z_1x_3z_3 - z_1y_2z_3 = x_1\left(x_3 + z_3 - y_2\right)z_1 + \\ &+ \left(z_1 + z_3 - y_2\right)y_2\left(x_1 + x_3 - y_2\right) + \\ &+ x_3\left(x_1 - y_2 + z_1\right)z_3 = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3. \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} &\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow 5b^2 > a^2 \Rightarrow 5b^2 \ge a^2 + 1 = \\ &= a^2 + 2a\cdot\frac{1}{4a} + \frac{1}{2} > a^2 + 2a\cdot\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = \\ &= \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 \Rightarrow 5 > \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}. \end{aligned}$$

19. Обезьянка Чита, начиная вытаскивать орехи первой, при правильной стратегии Чи-Чи получит меньшую добычу. Чи-Чи, например, может действовать так.

Если Чита первым ходом вытаскивает 1 орех, Чи-Чи следом вытаскивает 12 орехов и в дальнейшем обеспечивает себе победу (большее количество орехов). Если Чита первым ходом вытаскивает 5 орехов, то Чи-Чи следующим ходом вытаскивает один орех. Поскольку после этого в куче останется 19 орехов, то Чита следующим ходом сможет вытащить только один орех, зато Чи-Чи следом – 9. На данном этапе у Читы 6 орехов, у Чи-Чи – 10, в куче осталось 9. Если далее Чита вытаскивает 3 ореха, то Чи-Чи – тоже 3 ореха, если же Чита вытаскивает 1 орех, то Чи-Чи – 4 ореха. В любом из этих двух случаев Чи-Чи обеспечивает себе победу.

20. Угол $\angle C_1A_1B_1$ дополняет углы $\angle C_1A_1B$ и $\angle B_1A_1C$ до развернутого угла, поэтому он равен углу $\angle C_1AB_1$, который вместе с углами $\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$ и $\angle C_1B_1A = \angle C_1A_1B$ состав-