10 класс

1. Известно, что $(a+b+c)c<0$. Докажите, что $b^2>4ac$.

Фольклор

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в точках A и B, а вторую – в точках C и D (рис.2). Докажите, что углы AQD и BQC равны.

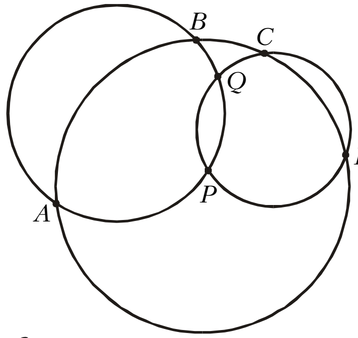

Рис. 2

А.Заславский

3. Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что числа x^3+y и y^3+x делятся на x^2+y^2.

С.Злобин

4. $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных. В синие секторы, начиная с некоторого, подряд записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n. В красные секторы, начиная с некоторого, записываются те же числа и таким же образом, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n.

В.Произволов

5. Кузнечик прыгает по отрезку [0; 1]. За один прыжок он может попасть из точки x либо в точку $x/\sqrt{3}$, либо в точку $x/\sqrt{3}+(1-1/\sqrt{3})$. На отрезке [0; 1] выбрана точка a. Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше $1/100$ от точки a.

А.Буфетов

6. Для чисел 1, …, 1999, расставленных по окружности, вычисляется сумма произведений всех наборов из 10 чисел, идущих подряд. Найдите расстановку чисел, при которой полученная сумма наибольшая.

Д.Дерягин

11 класс

1. a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

В.Сендеров

2. Плоская выпуклая фигура ограничена отрезками AB и AD и дугой BD некоторой окружности (рис.3). Постройте какую-нибудь прямую, которая делит пополам: а) периметр этой фигуры; б) ее площадь.

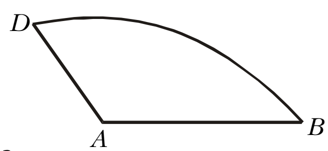

Рис. 3

В.Произволов, В.Сендеров

3. Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и черный цвета. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Д.Терешин

4. На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

А.Буфетов, А.Канель

5. Граф – это набор вершин, причем некоторые из них соединены ребрами (каждое ребро соединяет ровно две вершины графа). Раскраска вершин графа называется правильной, если вершины одного цвета не соединены ребром. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, причем его нельзя правильно раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.

Н.Чернятьев

6. Решите в натуральных числах уравнение $\left(1+n^k\right)^l=1+n^m$, где $l>1$.

Г.Челноков, В.Сендеров

7. Докажите, что первые цифры чисел вида 2^{2^n} образуют непериодическую последовательность.

А.Канель

Публикацию подготовили В.Бугаенко, А.Ковальджи, В.Сендеров, Р.Федоров, А.Шень, И.Ященко

Московский отбор на Российскую математическую олимпиаду

Избранные задачи

1. Имеются черные и белые интервалы. Сумма длин черных 1, и белых 1. Докажите, что их можно так расположить на отрезке длины 1,5, что интервалы одного цвета не пересекаются, а любые два интервала разных цветов либо не пересекаются, либо находятся один внутри другого. (9)[1]

2. Докажите, что уравнение $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=z^2+1$ имеет в натуральных числах бесконечно много решений таких, что $x>2000$, $y-x>2000$. (10)

В.Сендеров

3. Внутри равностороннего треугольника $A_1A_2A_3$ площади S_1 находится равносторонний треугольник $B_1B_2B_3$

[1] *В скобках указаны классы, в которых предлагалась задача.*