западнее Москвы или на той же долготе?

Фольклор

5. Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

Р.Гордин

6. На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала часть черного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

В.Гуровиц

7 класс

1. Числитель и знаменатель дроби – целые положительные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит $1/3$. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

Р.Федоров

2. Разрежьте данную фигуру (рис.1) по границам клеток на три равные (одинаковые по форме и величине) части.

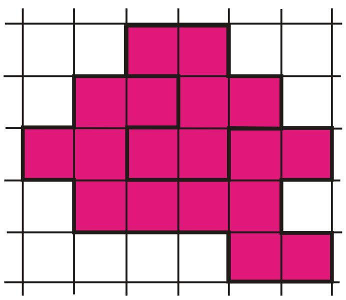

Рис. 1

Д.Калинин

3. См. задачу 4 для 6 класса.

4. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из A в B, другой – из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в B в 4 часа вечера, а другой – в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

Фольклор

5. См. задачу 5 для 6 класса.

6. Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных.

В.Произволов

8 класс

1. Сравнив дроби $x = \dfrac{111110}{111111}$, $y = \dfrac{222221}{222223}$, $z = \dfrac{333331}{333334}$, расположите их в порядке возрастания.

Фольклор

2. Покажите, как любой четырехугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией).

В.Произволов

3. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

В.Произволов, В.Сендеров

4. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

А.Толпыго

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O – середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC – точка N так, что угол MON – прямой. Докажите, что $AM^2 + CN^2 = MN^2$.

В.Произволов

6. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую – черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, за поражение – 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

Б.Френкин

9 класс

1. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.

(Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\dfrac{a+b}{2}$, а средним гармоническим – число $2\Big/\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.)

А.Канель

2. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы $А$ и $Б$ (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т.е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

В.Изместьев

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O, B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O, C, касается прямой CD.

А.Заславский

4. Найдите все такие целые положительные k, что число $\underbrace{1\ldots1}_{2000}\overbrace{2\ldots2}^{k} - \underbrace{2\ldots2}_{1001}$ является квадратом целого числа.

Е.Осьмова

5. Вписанная окружность треугольника ABC ($AB > BC$) касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно, RS – средняя линия, параллельная AB, T – точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника.

М.Евдокимов

6. В соревнованиях по n-борью участвуют 2^n человек. Для каждого спортсмена известна его сила в каждом из видов программы. Соревнования проходят следующим образом: сначала все спортсмены участвуют в первом виде программы и лучшая половина из них выходит в следующий круг. Эта половина принимает участие в следующем виде и половина из них выходит в следующий круг, и т.д., пока в n-м виде программы не будет определен победитель. Назовем спортсмена «возможным победителем», если можно так расставить виды спорта в программе, что он станет победителем.

а) Докажите, что может так случиться, что хотя бы половина спортсменов является «возможными победителеми»;

б) докажите, что всегда число «возможных победителей» не превосходит $2^n - n$;

в) докажите, что может так случиться, что «возможных победителей» ровно $2^n - n$.

А.Герко