

LXII Московская МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Избранные задачи окружного тура

1. К Саше в день рождения пришли 5 друзей. Первому он дал $1/6$ часть пирога, второму – $1/5$ часть остатка, третьему – $1/4$ часть того, что осталось, четвертому – $1/3$ нового остатка, пятому – $1/2$ последнего остатка. Кто из друзей Саши получил самый большой кусок пирога? (5)¹

А.Шевкин

2. В левом нижнем углу листа клетчатой бумаги стоит шахматный конь. Ему разрешается делать прыжки только двух видов: либо на две клетки вверх, а затем на клетку вправо, либо на две клетки вправо, а затем на клетку вверх. Конь попал в клетку, расположенную на 40 клеток правее и на 50 клеток выше исходного положения. За сколько прыжков он это сделал? (5, 6)

Б.Чамов

3. Раскрасьте клетки доски 4×4 в 4 цвета так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, каждом вертикальном ряду и на каждой из двух диагоналей оказались клетки, покрашенные в каждый из четырех цветов. (5)

А.Спивак

4. Разрежьте плоскость 6 прямыми так, чтобы все пары прямых пересекались в разных точках, а среди получившихся частей оказалось ровно 4 треугольника. (6, 7)

А.Ковальджи

5. Разрежьте квадрат 5×5 клеток по линиям сетки на 7 различных прямоугольников (прямоугольники считаются различными, если их нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совпали). (7)

И.Рубанов

6. В классе 24 ученика. Каждый из них любит либо физику, либо лирику, либо и то и другое. Оказалось, что среди любителей физики 20% любителей лирики, а среди любителей лирики – 25% любителей физики. Сколько учеников любят одновременно и физику, и лирику? (7)

А.Ковальджи

7. Длины сторон треугольника – целые числа. Длина одной стороны равна 5, другой – 1. Найдите длину третьей стороны. (8)

И.Таурова

8. В клетчатом квадрате размером 5×5 расставьте 5 единиц, 5 двоек, 5 троек, 5 четверок и 5 пятерок так, чтобы сумма чисел в любом квадрате размером 2×2 (со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата) была одна и та же. (8)

А.Спивак

9. Два круга, площади которых 1 кв. см и 5 кв. см, пересекаются. S_1 – площадь той части меньшего круга, которая не входит в больший круг; S_2 – площадь той части большего круга, которая не входит в меньший. Найдите разность площадей $S_2 - S_1$. (10)

И.Таурова

10. Числа a, b, c, d таковы, что при любых значениях x выполняется равенство

$$3(x+a)^4 = (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4.$$

Докажите, что $a = b = c = d$. (10, 11)

А.Ковальджи

11. В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число. (10)

В.Сендеров

12. В телесериале «Математики тоже плачут» 15 героев. В каждой серии с одним из героев происходит одно из трех событий: либо он узнает тайну, либо он узнает, что другой герой знает тайну, либо он узнает, что другой герой не знает тайны. Каково максимально возможное число серий? (Тайна одна, изначально ее никто не знает, про каждого двух героев A и B серия типа « A узнал, что B тайны не знает» бывает только одна.) (10)

А.Канель

13. Дан график гиперболы $y = 1/x$. Проведены 100 вертикальных прямых через точки $x = 1, 2, 3, \dots, 100$. Пусть A_1, A_2, \dots, A_{100} – точки пересечения прямых с гиперболой. Построены 99

прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, для которых отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{99}A_{100}$ являются диагоналями. Найдите сумму площадей этих прямоугольников. (11)

Д.Александров

14. Цилиндрическую кружку диаметром 2 и высотой 2, наполненную доверху водой, отклонили от вертикали на 30° (угол между осью кружки и вертикалью). Какая доля воды выльется? (11)

Фольклор

15. В окружность диаметром 1 вписали правильный 10-угольник и отметили на окружности произвольную точку. Найдите сумму квадратов расстояний от этой точки до вершин 10-угольника. (11)

Е.Юрченко

Городская олимпиада

6 класс

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке. Такое «уплотнение» повторили еще дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

Д.Калинин

2. Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение – 420.

Д.Калинин

3. Квадрат 4×4 разделен на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в черный и белый цвета так, чтобы у каждой черной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один черный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Фольклор

4. Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, затем 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее ее или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы,

¹ В скобках указаны классы, в которых предлагалась задача.