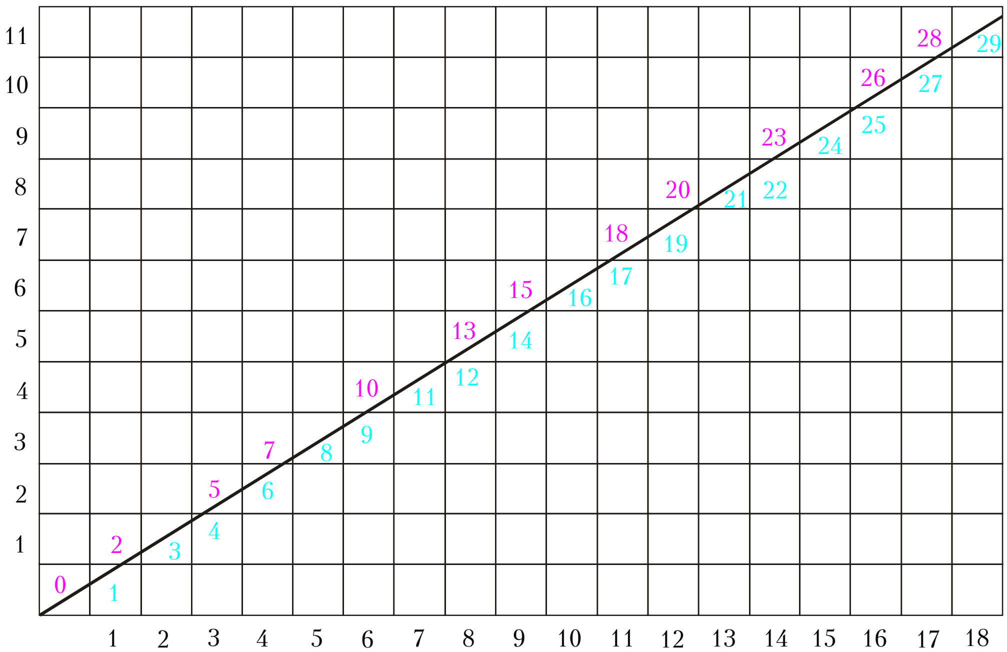
$= 1$, $g(n) = n a - 1 - f(n)$ и, наконец, $f(n+1)$ – наименьшее натуральное число, отличное от каждого из $2n$ чисел $f(1)$, $f(2)$, …, $f(n)$, $g(1)$, $g(2)$, …, $g(n)$. Докажите, что существуют такие числа α и β, что $f(n) = [\alpha n]$, $g(n) = [\beta n]$.

9. а). Пусть $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Докажите для любого натурального числа n равенство $[n\alpha^2] = [\alpha[\alpha n]] + 1$.

б) Пусть последовательность всех натуральных чисел разбита на две непересекающиеся подпоследовательности $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$ и $g(1) < g(2) < g(3) < \ldots$, причем $g(n) = f(f(n)) + 1$ для любого n. Найдите $f(240)$. (Этот пункт в 1978 году предлагался на Международной математической олимпиаде и вошел в «Задачник «Кванта» под номером М538.)

10. Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 1$ и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Докажите, что каждое натуральное число входит в одну и только одну из последовательностей $a_n = [\alpha n]$ и $b_n = \lceil \beta n \rceil - 1$, где через $\lceil x \rceil$ обозначено наименьшее целое число, которое больше или равно числу x (иначе говоря, $\lceil x \rceil = -[-x]$).



Геометрическая интерпретация

Что для нас – головоломка,
духом тайны разум будит –
очевидно, для потомка
просто школьным курсом будет.

И.Губерман

Теорема 1 настолько красива, что возникает желание глубже проникнуть в суть дела. Пусть, как и ранее, α и β – положительные иррациональные числа, причем $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Тогда $\beta + \alpha = \alpha\beta$, откуда $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$.

Нарисуем на клетчатой бумаге (см. рисунок) как на координатной плоскости прямую l, заданную уравнением $y = (\alpha - 1)x$, которое можно записать также в виде $x = (\beta - 1)y$. Занумеруем подряд все клетки, которые пересекает l, начиная с нулевой клетки, которой принадлежит начало координат (на рисунке взято $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$). Поскольку число α иррационально, прямая l не проходит через узлы сетки (кроме, разумеется, начала координат). Значит, l входит в очередную клетку либо слева, пересекая вертикальную линию сетки, либо снизу, пересекая горизонтальную линию.

Если l вошла в клетку слева и пересекла при этом вертикаль $x = n$, то номер клетки, в которую при этом вошла прямая, равен $n + [(\alpha - 1)n] = [\alpha n]$. (Это не очевидно? Согласен. Но если занумеровать не только клетки, которые пересекает l, а вообще присвоить номер $n + m$ каждой клетке, заданной неравенствами $n \le x < n+1$, $m \le y < m+1$, то ситуация вполне прояснится.) Если же прямая l снизу пересекла горизонталь $y = m$, то номер соответствующей клетки равен $[(\beta - 1)m] + m = [\beta m]$.

Вот и все. Согласитесь, это геометрическое доказательство теоремы 1 достойно восхищения! И хотя можно было бы еще очень многое рассказать (последовательности $a_n = \left[n\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]$, $b_n = \left[n\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]$ связаны и с игрой цзяньшицзы, и с числами Фибоначчи, и со многими другими интересными задачами), я ограничусь советом прочитать статью И.М.Яглома «Две игры со спичками» («Квант» №1 за 1992 год) и статью А.Ю.Матулиса, А.Ю.Савушкинаса «Ферзя – в угол, «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи» («Квант» №7 за 1984 год).

(Окончание следует)

РЕЦЕНЗИИ

Конкретная математика

Примеры учат не меньше, чем правила. «Конкретная» математика... остается при всех поворотах моды и составляет необходимую часть ремесла всякого математика.

В.И.Арнольд

Издательство «Мир» перевело на русский язык книгу «Конкретная математика. Основание информатики», в основу которой положен курс лекций, уже тридцать лет подряд читаемый в Стэнфордском университете (США). У книги три автора. Один из них – крупный специалист по комбинаторике, профессор Рутгерского университета, сотрудник «Bell Laboratories» Рональд Грэхем. Другой – профессор информатики Стэнфордского и многих других университетов (в том числе Санкт-Петербургского), автор зачитываемого до дыр учебника «Искусство программирования для ЭВМ», создатель в высшей степени удобной и ставшей фактическим стандартом научных публикаций издательской системы TEX Дональд Кнут. Третий – Орен Паташник, сотрудник Исследовательского центра средств связи в Ла-Лохья.

Для математиков нашей страны идея «Конкретной математики» не является неожиданностью: замыслы основателей