# Несколько задач для 11-классников

О.ИВАНОВ, Т.ИВАНОВА

В данной статье речь идет о «почти школьных задачах», в каждой из которых в формулировке имеется элемент неожиданности. По духу они близки задачам олимпиад 50—60-х годов (а некоторые просто были позаимствованы из различных сборников, содержащих варианты олимпиад тех лет).

**Задача 1.** *Найдите все целые k, при которых разрешимо уравнение*

$$\sqrt{\arcsin x}+\sqrt{\arccos x}=\sqrt{\frac{k}{10}}.$$

**Решение.** Не следует пугаться присутствующих в условии обратных тригонометрических функций. Поскольку $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, то после замены $t=\arcsin x$ получим уравнение

$$\sqrt{t}+\sqrt{\frac{\pi}{2}-t}=\sqrt{\frac{k}{10}},\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Полученное уравнение разрешимо, если число $\sqrt{\frac{k}{10}}$ входит в множество значений функции $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{\frac{\pi}{2}-t}$. Для его нахождения можно стандартным образом исследовать функцию при помощи производной, а можно воспользоваться оценками

$$\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}\ (a,b\ge 0);$$

заметим, что эти неравенства обращаются в равенства, соответственно, при $a=0$ или $b=0$ и $a=b$. Следовательно, множеством значений функции $f$ является отрезок $\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}};\sqrt{\pi}\right]$. Значит, решение исходного уравнения существует тогда и только тогда, когда $5\pi\le k\le 10\pi$, откуда получаем ответ: $k$ = 16, 17, … …, 31.

**Задача 2.** *Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро — двум.*

**Решение.** Вместо того чтобы пытаться выразить площадь проекции через площади граней пирамиды с использованием формулы $S_{\text{пр}}=S\cos\theta$, лучше посмотреть, что представляет из себя проекция данной пирамиды. Возможны два случая. В первом из них проекция является треугольником — проекцией одной из граней пирамиды, во втором она — четырехугольник, диагоналями которого являются проекции некоторых двух скрещивающихся ребер. Ясно, что в первом случае площадь проекции наибольшая, если мы проектируем нашу пирамиду на плоскость, параллельную той ее грани, которая имеет наибольшую площадь; в нашем случае это грань со сторонами 1, 2, 2, ее площадь $\frac{1}{4}\sqrt{15}$. Второй случай более интересен. Площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где $d_1$, $d_2$ — это длины его диагоналей, а $\alpha$ — угол между ними. Ясно, что $d_1\le 1$, $\sin\alpha\le 1$, $d_2\le 2$, поэтому произведение всех этих величин не превосходит двух. Осталось заметить, что поскольку скрещивающиеся ребра правильной пирамиды перпендикулярны друг другу, то при проектировании на параллельную им плоскость площадь проекции равна единице, что больше $\frac{1}{4}\sqrt{15}$. Таким образом, ответ: 1.

**Задача 3.** *Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет далее брать только проценты с накопившейся за это время на его счету суммы? Банк дает 30% годовых; считайте, что* $\lg 1{,}3=0{,}114$.[1]

[1] *Прочитав формулировку задачи, один из наших коллег сказал, что ответ — «ничего», поскольку банк, который выплачивает такой процент, заведомо прогорит. И, как мы увидели на практике, он оказался прав. Но это уже совсем другая наука…*

**Решение.** Конечно, можно прямо подсчитать, сколько же денег на счету окажется у Ивана через 8 лет. Заметим, что проделать аналогичное вычисление при решении задачи 2, г) варианта 2 (в конце статьи) будет более затруднительно, не говоря уже о том, что делать это без калькулятора просто глупо.

Мы проведем вычисления в общем виде, воспользовавшись численными данными лишь на заключительном этапе решения. Итак, пусть $a$ — вносимая Иваном ежегодно сумма, а $\alpha$ — начисляемый годовой процент. В первый год он внес $a$ рублей, так что после начисления годовых процентов через год у него на счету будет $a+a\frac{\alpha}{100}=a\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)$ рублей. Удобно ввести дополнительное обозначение $q=1+\frac{\alpha}{100}$, так что если некто имел на счету в начале года $s$ рублей, то после начисления процентов у него окажется $sq$ рублей. Вернемся к Ивану. После того, как он в конце первого года снова внес свои $a$ рублей, у него на счету стало их $a+aq$; в конце второго года их станет (после очередного взноса) $a+(a+aq)q=a+aq+aq^2$. Теперь уже ясно, что сумма, скопившаяся на счету Ивана за 8 лет, равна $a+aq+\ldots$ $\ldots+aq^8$, ежегодные проценты с которой составляют

$$(q-1)\left(a+aq+\ldots+aq^8\right)=$$

$$=a\left(q^9-1\right)\text{ рублей.}$$

В нашем случае $q=1{,}3$, $q^9=1{,}3^9=10^{9\lg 1{,}3}>10$, так как $9\lg 1{,}3=9\cdot 0{,}114>1$. Поэтому имеется по крайней мере 90000 рублей ежегодного дохода в распоряжении Ивана и всех его будущих наследников.

**Задача 4.** *Докажите, что если* $a_i>0$, $a_ic_i\ge b_i^2$ $(i=1,2,3)$, *то*

$$\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(c_1+c_2+c_3\right)\ge$$

$$\ge\left(b_1+b_2+b_3\right)^2.$$

**Решение.** Решим задачу для произвольного количества $n$ чисел $a_i$, $b_i$, $c_i$. Введем квадратные трехчлены $q_i(x)=a_ix^2+2b_ix+c_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Так как по условию $a_i>0$ и $a_ic_i\ge b_i^2$, то $q_i(x)\ge 0$ при всех $x\in\boldsymbol{R}$. Значит,

$$\sum_{i=1}^n q_i(x)=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)x^2+$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)x+\sum_{i=1}^n c_i\ge 0,$$